



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

RICARDO MAZZINI BORDINI

**UM ESPAÇO ATONAL EXPADIDO DE ENCADEAMENTOS
PARA TRI, TETRA, PENTA E HEXACORDES.**

**SÃO LUÍS, MA
2024**

RICARDO MAZZINI BORDINI

**UM ESPAÇO ATONAL EXPANDIDO DE ENCADEAMENTOS
PARA TRI, TETRA, PENTA E HEXACORDES.**

Tese apresentada à Universidade Federal do
Maranhão para obtenção do grau de Professor
Titular da Cadeira de Sistemas e Estruturas
Musicais.

São Luís, MA
2024

Bordini, Ricardo Mazzini

Um espaço atonal expandido de encadeamentos para tri, tetra, penta e hexacordes / Ricardo Mazzini Bordini. – São Luís: [s.n.], 2024.

120 f.

Tese (Professor Titular) - Curso de Música, Universidade Federal do Maranhão, 2024.

1. Musicologia sistemática 2. Teoria pós-tonal. 3. Espaços atonais de encadeamento. I. Título.

CDU 78

Nome: Ricardo Mazzini Bordini

Título: Um espaço atonal expandido de encadeamentos para tri, tetra, penta e hexacordes.

Tese apresentada à Universidade Federal do Maranhão para obtenção do grau de Professor Titular da Cadeira de Sistemas e Estruturas Musicais.

Aprovada em 27 de março de 2025.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rodolfo Nogueira Coelho de Souza

Prof. Dr. Pablo Sotuyo Blanco

Prof. Dr. Anselmo Guerra de Almeida

DEDICATÓRIA

Aos três que não tive.

Aos que a vida me deu: Bobby, Tigre, Pelé I, Pelé II, Pila, Ching-Ling, Lazúli, Ciranda,
Borracheira, Felícia, Lobinho, Topázio, Cristal, Gato Preto e Nito.

AGRADECIMENTOS

A

Joseph N. Straus, por ter feito o que fez,

Cristina Gerling e Ilza Nogueira, altivas luminares, não imaginavam o que estavam, sem querer, a fazer por este trabalho em 1989,

Jamary Oliveira e Marcos da Silva Sampaio por terem sido um o que foi e outro o que é e sem os quais nada disso estaria aqui,

Aos Mazzini de Garibaldi (RS) e aos Bordini de Carlos Barbosa (RS),

Andréa, Cláudio e Geane, cuidamo-nos, queremos-nos bem e fazemos o melhor possível uns pelos outros,

Àqueles que se não ajudaram, ao menos não atrapalharam,

Àqueles que sabiam o que estavam fazendo a aos que não sabiam e, provavelmente, nunca saberão e que se os preserve assim para sua (deles) felicidade,

Aline Silva pela revisão cuidadosa e competente; lavou, enxaguou, quarou e não satisfeita, serziu, engomou e passou o texto a ferro,

Aos números e sua música intangível.

EPÍGRAFE

O cavalo velho conhece o caminho.

Provérbio chinês lido em uma tirinha de papel encontrada dentro de um crocante biscoito chinês, mas feito no Brasil. No verso havia esses números: 16 24 33 41 56 60 escritos com tinta de cor azul.

*O navio é seguro quando está no porto.
Mas não é para isso que se fazem navios.*

Como o anterior, mas com os números: 07 30 32 35 47 51 escritos no verso com tinta de cor vermelha.

BORDINI, Ricardo Mazzini. **Um espaço atonal expandido de encadeamentos para tri, tetra, penta e hexacordes**. 2024. 120 f. Tese (Professor Titular) - Curso de Música, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2025.

RESUMO

A tese aqui apresentada é um desdobramento de dois projetos de pós-doutorado e aborda a introdução de uma nova operação àquelas já tradicionais para a construção do espaço atonal de encadeamentos. O objetivo é ampliar o escopo de encadeamentos e gerar um modelo sistemático para eles incluindo multiconjuntos. A metodologia baseia-se em efetuação de cálculos e compilação de dados apresentados em dois suportes: um modelo gráfico e uma página HTML para consulta *online*. Os resultados incluem mais opções para realizar os mesmos encadeamentos do modelo tradicional e acresce alguns novos, além de prover aplicações práticas em análise, composição e ensino de música. Como conclusão, constata-se que o modelo expandido provê novas relações de encadeamento e pode constituir-se em um novo sistema de composição com implicações em técnicas de análise e ensino de música em contextos não tonais.

PALAVRAS-CHAVE: Musicologia sistemática; Teoria pós-tonal; Espaços atonais de encadeamentos.

BORDINI, Ricardo Mazzini. **An Expanded Atonal Voice-Leading Space for tri, tetra, penta and hexachords.** 2024. 120 p. Dissertation (Full Professor) – Music Course, Federal University of Maranhão, São Luís, 2025.

ABSTRACT

The present dissertation is an offshoot of two postdoctoral projects and addresses the introduction of a new operation to those already traditional regarding atonal voice-leading spaces. It aims to expand voice-leading scope and generate a systematic model including multisets. Applied methodology is based on data calculations and compilation as presented in two supports: a graphic model and an HTML page for online access. Acquired results include more options to perform the same voice-leading provided by traditional model and adding some new ones, in addition to supplying practical applications in analysis, composition and music teaching. In conclusion, it is found that the expanded model provides new voice-leading relations and can constitute a new composition system with implications in such areas as analysis techniques and music teaching in non-tonal contexts.

KEYWORDS: Systematic musicology; Post-Tonal theory; Atonal voice-leading spaces.

LISTA DE EXEMPLOS

Exemplo 1 – um pequeno excerto musical.	77
Exemplo 2 – redução, segmentação e análise do excerto.	78
Exemplo 3 – solfejos e ditados com as díades.	85
Exemplo 4 – aplicação criativa com finalidade didática.....	86
Exemplo 5 – uma análise do excerto didático.....	86
Exemplo 6 – prática preparatória envolvendo inversões e rotações.	87
Exemplo 7 – melodia modificada.	88
Exemplo 8 – análise da melodia alterada.....	88
Exemplo 9 – comparação entre as duas análises.....	88
Exemplo 10 – estudo de encadeamentos com pentacordes.....	89

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – forma normal “verdadeira” e derivada.	23
Figura 2 – convenções usadas na carta.	38
Figura 3 – carta de navegação para tricordes.	43
Figura 4a – carta de navegação para tetracordes (A01).	46
Figura 4b – carta de navegação para tetracordes (A02).	47
Figura 4c – carta de navegação para tetracordes (A03)	47
Figura 5 – o espaço de encadeamentos para (0136).....	81
Figura 6 – pares Z-relacionados e sua estrutura.....	100

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – referências sobre espaço atonal de encadeamentos.....	9
Quadro 2 – operações por cardinalidade.....	28
Quadro 3 – estrutura de marcação XML.....	31
Quadro 4 – dados para 3-1 (012).	56
Quadro 5 – dados para 4-1 (0123).	58
Quadro 6 – dados para 5-1 (01234).	61
Quadro 7 – dados para 6-1 (012345).	65
Quadro 8 – conteúdo classe-intervalar em comparação.....	79
Quadro 9 – problemas metodológicos na geração de material para composição.	82
Quadro 10 – desinvertendo para corrigir operações sequenciais.	83
Quadro 11 – operações sequenciais envolvendo multiconjuntos.....	83
Quadro 12 – operações simples replicadas por duplas para tricordes.....	93
Quadro 13 – operações simples replicadas por duplas para pentacordes.....	94
Quadro 14 – encadeamentos especiais com hexacordes.	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – total de operações.	26
Tabela 2 – latitudes e longitudes nos aglomerados.	27
Tabela 3 – quantidades de encadeamentos por cardinalidade.	35
Tabela 4 – quantidade de encadeamentos com operações simples (tricordes).	42
Tabela 5 – quantidade de encadeamentos com operações duplas (tricordes).	42
Tabela 6 – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (tricordes).	43
Tabela 7 – quantidade de encadeamentos com operações simples (tetracordes).	44
Tabela 8 – quantidade de encadeamentos com operações duplas (tetracordes).	44
Tabela 9 – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (tetracordes).	45
Tabela 10 – quantidade de encadeamentos com operações simples (pentacordes).	48
Tabela 11 – quantidade de encadeamentos com operações duplas (pentacordes).	48
Tabela 12a – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (pentacordes).	49
Tabela 12b – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (pentacordes).	49
Tabela 13 – quantidade de encadeamentos com operações simples (hexacordes).	51
Tabela 14 – quantidade de encadeamentos com operações duplas (hexacordes).	51
Tabela 15a – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (hexacordes).	52
Tabela 15b – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (hexacordes).	53
Tabela 15c – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (hexacordes).	54
Tabela 16 – quantidades de conexões e operações para tricordes.	70
Tabela 17 – quantidades de conexões e operações para tetracordes.	71
Tabela 18 – quantidades de conexões e operações para pentacordes.	72
Tabela 19 – quantidades de conexões e operações para hexacordes.	73
Tabela 20 – operações simples replicadas por duplas.	98

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1: REVISÃO DE LITERATURA	5
LITERATURA NORTE-AMERICANA.....	5
LITERATURA BRASILEIRA	11
PRODUÇÃO PESSOAL ESPECÍFICA	16
ENSINO E ORIENTAÇÕES	18
CAPÍTULO 2: METODOLOGIA E PADRÕES DE MODELAGEM	21
MULTICONJUNTOS.....	21
METODOLOGIA	26
CAPÍTULO 3: O ESPAÇO ATONAL EXPANDIDO.....	35
O ESPAÇO DE TRICORDES	41
O ESPAÇO DE TETRACORDES	44
O ESPAÇO DE PENTACORDES	47
O ESPAÇO DE HEXACORDES	50
OS ENCADEAMENTOS	55
CAPÍTULO 4: APLICAÇÕES PRÁTICAS	76
ANÁLISE.....	76
COMPOSIÇÃO	81
ENSINO DE MÚSICA	84
CONCLUSÃO	91
REFERÊNCIAS.....	103

INTRODUÇÃO

Esta tese resulta de muitos anos de estudos sobre os espaços atonais de encadeamentos, um ramo da Teoria Pós-tonal relativamente recente que se dedica a estudar as propriedades dos conjuntos de classes de notas¹ relacionadas com suas interações, tanto para fins de análise quanto de composição musical. Em alguma medida, com muitas modificações, resulta diretamente do projeto apresentado para o estágio pós-doutoral realizado na Universidade da Califórnia em Santa Cruz, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), de junho de 2011 até julho de 2012, que se realizou sob a supervisão do Dr. David Evan Jones. Faz-se mister agradecer ao Dr. Joseph N. Straus por permitir o uso e a alteração da sua representação do espaço de encadeamentos para tricordes e pelas suas muitas sugestões e correções valiosas. Agradecimento especial também para Matthew Mitchell, por seus muitos comentários inspiradores. A continuação do projeto deu-se como parte de um segundo estágio pós-doutoral realizado entre agosto de 2023 e julho de 2024 sob supervisão do Prof. Dr. Marcos da Silva Sampaio, a quem agradeço penhoradamente, pois, sem sua valiosa colaboração, este trabalho teria sido inimaginavelmente mais difícil, se é que possível.

O modelo apresentado aqui parte do espaço atonal de encadeamentos para tricordes conforme apresentado por Straus (2005a, p. 111),² cuja configuração é modificada para conter números de soma e conectores codificados. Transfere-se então o modelo modificado para tetracordes, pentacordes e hexacordes. O modelo agora proposto apresenta as seguintes características: 1) usa exclusivamente classes de conjuntos em forma prima; 2) inclui *multisets*;³ e 3) admite uma operação complementar além daquelas usadas normalmente. A inserção do termo expandido no título justifica-se por essa última adição.

Os cálculos (ver a Metodologia) são realizados com o auxílio do aplicativo Processador de Classes de Notas (PCN) desenvolvido pelo Prof. Dr. Jamary Oliveira. Com a inclusão de multiconjuntos, surgiu a necessidade de um método mais sofisticado de cálculo de formas primas e, como resultado da colaboração com o Prof. Marcos da Silva Sampaio, uma suíte de

¹ Conjuntos de classes de notas (*pitch-class sets*) são: “uma coleção não ordenada de classes de notas” e uma classe de notas é “um grupo de notas com o mesmo nome ou enarmônicos”, em resumo: “é uma coleção de notas relacionadas por equivalências de oitava e enarmônica”. ... A pitch-class set is an *unordered collection of pitch classes* ... a *pitch-class* (a group of pitches with the same or enharmonic name). [...] A *pitch-class* is a collection of pitches related by octave and enharmonic equivalence. (Straus, 2016, p. 43 e p. 4-5).

² “Um espaço de encadeamentos é definido como uma sequência ordenada de mapeamentos de um conjunto de classe de notas em outro”. A voice leading is defined as an ordered series of mappings of one pitch-class set onto another (Lundberg, 2012, p. iv).

³ *Multisets* são coleções que admitem duplicação de classes de notas, por exemplo, {1,2,4,4}. Um estudo exaustivo encontra-se em Robinson (2009).

aplicativos, denominada Zarlino, desenvolvida por ele em Javascript e HTML com *framework* VueJS e acessível em: <https://zsuite.sampaio.me/pt-br/>, atualizou e expandiu as operações do PCN. Com sua ajuda, todas as planilhas foram cotejadas automaticamente para verificar eventuais erros através de um algoritmo escrito em Python.

Os dados foram e continuam sendo codificados em XML e os resultados da pesquisa bem como textos e métodos para utilização do espaço atonal expandido de encadeamentos estão publicados e disponíveis em uma página criada especialmente para esse fim e abrigada em: <https://musica.ufma.br/bordini/eavls/>.

A justificativa para estudar o espaço atonal de encadeamentos repousa nas referências copiosas recentes e continuadas, daí configurar-se como um tópico importante de pesquisa incluindo trabalhos de autoridades como Straus, Morris, Cohn, Tymoczko e recentemente Lundberg e outros, cujos trabalhos seminais sobre o tópico são tratados em detalhe na Fundamentação. A vasta literatura é especializada e traz contribuições importantes para o estado da arte da teoria pós-tonal com implicações diretas nos processos de composição musical explorados atualmente. Os estudos sobre o espaço atonal de encadeamentos têm conexão inicialmente com a teoria neo-riemanniana⁴ de encadeamentos parcimoniosos e alia-se a esta na busca de um modelo geral. Entretanto, os encadeamentos parcimoniosos estão restritos originalmente a acordes e associados ao sistema modal-tonal. Manter-se-á na fundamentação e revisão de literatura a expressão: encadeamentos parcimoniosos, porém, para efeito do espaço atonal expandido, usar-se-á o termo encadeamentos por semitom, para evitar confusão, já que estes não estão restritos como aqueles.

O que se almeja nesta tese é prover um modelo prático e um método sistemático para guiar estudantes, analistas, pesquisadores e principalmente compositores enquanto atravessam o espaço de encadeamentos na busca e coleta de informações dirigidas à elaboração de material pré-compositivo, analítico e educativo.

O objetivo geral da tese é estudar e mapear as relações de encadeamento entre as classes de conjuntos para tricordes, tetracordes, pentacordes e hexacordes, configurados em um espaço atonal expandido de encadeamentos, destinado a servir de auxílio para a geração de material pré-compositivo. Para tanto há que: 1) calcular as operações e colocar os resultados em forma

⁴ A expressão “encadeamento parcimonioso”, fundamental na construção do espaço de encadeamentos, origina-se da referida teoria e aplica-se, grosso modo, ao encadeamento em que apenas um elemento desloca-se por semitom permanecendo os demais inalterados (ver Cohn, 1998).

prima para modelar o espaço de encadeamentos atonal expandido para tricordes, tetracordes, pentacordes e hexacordes; 2) analisar as relações de encadeamento entre as classes de conjuntos e oferecer metodologias para sua utilização, bem como textos explanatórios sobre o comportamento do espaço para cada cardinalidade de classes de conjuntos; 3) refinar o método de efetuação de operações, suas regras e o sistema de codificação dos conectores para os mapeamentos; 4) prover informações detalhadas sobre todas as classes de conjunto e cada conexão⁵ possível incluindo as modificações sofridas pelo vetor classe-intervalar em cada operação; e 5) publicar os dados em XML com transformação XSL, bem como os textos e os modelos em versão bilíngue português e inglês para consulta livre na página *online* do projeto.

A metodologia inclui os seguintes processos: 1) cálculos em planilha para gerar os conjuntos resultantes, aplicando-se todas as operações possíveis para cada cardinalidade; 2) cálculo das formas primas dos resultados usando o PCN e o Zarlino; 3) classificação das conexões em função dos tipos de encadeamento seguindo critérios previamente estabelecidos; e 4) plotagem dos gráficos gerais e dos subespaços com informações descritas em XML com transformação XSL. Devido à quantidade considerável de dados, revisões constantes são feitas para garantir sua integridade.

A tese é: a expansão do espaço atonal de encadeamentos pela inclusão de uma nova operação replica e amplia os encadeamentos tradicionais provendo mais diversidade e opções de encadeamentos. A expansão do espaço atonal de encadeamentos pode ser mapeada em extratos progressivamente derivados de instâncias gradativamente mais complexas e sua ordenação em subespaços pode mostrar com mais detalhe e simultaneamente com mais amplitude panorâmica as propriedades, relações e os possíveis caminhos para atravessá-lo, ampliando as possibilidades de perpassar o espaço de encadeamentos atonal por vias novas, além de prover um método seguro de encadeamentos, facilitando as tarefas do estudioso, do analista, do compositor ou do pesquisador. Impactos na área de especulação teórica sobre processos de composição não são em geral notáveis em curto prazo. Espera-se que o uso do mapeamento proposto, por incluir variantes e, em decorrência da metodologia aplicada, possa gerar, em longo prazo, impacto significativo na área de composição musical com resultados inovadores no repertório de técnicas compositivas.

O Capítulo 1 aborda a revisão de literatura limitada aos formuladores da teoria e à produção norte-americana, da qual provém a imensa maioria de trabalhos sobre espaço de

⁵ Usar-se-á indistintamente os termos conexão e encadeamento com o mesmo sentido.

encadeamentos. A literatura brasileira destaca os divulgadores e autores com produção reconhecida no tópico. Remete-se também à produção do autor e de seus orientandos. O Capítulo 2 discorre acerca do problema dos multiconjuntos e detalha a metodologia de construção e organização do modelo e do tratamento dos dados juntamente aos padrões e convenções simbólicas a serem utilizados. O Capítulo 3 está subdividido em cinco seções, sendo uma para cada cardinalidade de classes de conjuntos: tricordes, tetracordes, pentacordes e hexacordes, cada qual com seu modelo de encadeamentos atonais e dados estatísticos sobre sua constituição, encerrando com uma amostra de encadeamentos. O Capítulo 4 estuda algumas aplicações para geração de materiais pré-composicionais juntamente a sugestões para aplicações em análise, composição e ensino de música. A conclusão apresenta os resultados de forma global e em perspectiva, vislumbrando desdobramentos e aprofundamentos no estudo do espaço atonal expandido de encadeamentos.

[Adiciona-se este parágrafo após a defesa que ocorreu em 27 de março de 2025 para registrar o agradecimento aos membros da banca e comentar pontos importantes trazidos à discussão durante as arguições. A gravação em vídeo da defesa pode ser acessada em: <https://www.youtube.com/watch?v=uaFWMBqKEhk>. O Prof. Dr. Anselmo Guerra de Almeida sugeriu vincular arquivos de áudio aos exemplos do capítulo sobre aplicações práticas e perguntou sobre como o projeto seria operacionalizado. O Prof. Dr. Pablo Sotuyo Blanco mencionou a utilização inapropriada do termo “musicológico” e sugeriu em seu lugar “modelos sistemáticos” além da adoção de “modelos pré-composicionais de nível micro organizacional” fazendo referência à sua tese de doutorado e especificamente ao seu artigo: Sotuyo Blanco, Pablo. Modelos Pré-Composicionais e a análise musicológica. *Música em Contexto*, [S. l.], v. 1, n. 1, p. 91–105, 2007. Fez menção também a modelos topológicos para organização dos dados. O Prof. Dr. Rodolfo Nogueira Coelho de Souza mencionou o trabalho de Forte (os gráficos K que foram esquecidos), retificar ou esclarecer a “falsa análise” no capítulo sobre aplicações práticas, inclusão na tese da referência ao artigo sobre o Op. 25 de Schoenberg e, a falta de itens importantes na revisão de literatura como o *Composition with pitch classes* de Robert Morris, o *Analyzing Atonal Music* de Michiel Schuijjer e menções ao panorama europeu (basicamente o IRCAM). Na arguição procurou-se esclarecer que arquivos de áudio serão futuramente incluídos, que o termo “musicológico” será substituído por “sistemático”, mas não se adotará por ora o uso de “modelos pré-composicionais” posto que implicaria mudanças substantivas na tese. Esclareceu-se também que a revisão se deteve apenas nos tópicos específicos relacionados com a tese, que o artigo não havia sido incluído por estar ainda no prelo (está incluído agora). Sobre a “trapaça” analítica crê-se que o contexto deixa claro que se trata de uma análise de uma composição feita sob encomenda para justificá-la, mas fica registrado aqui. Após a leitura do parecer aprovando a tese o Prof. Rodolfo sugeriu que a revisão de literatura não carece expansão posto que de fato já inclui uma revisão de memorial.]

CAPÍTULO 1: REVISÃO DE LITERATURA

Dada a grande quantidade de referências disponíveis, mormente daquelas selecionadas para essa tese, há que separá-las em dois grupos: a literatura norte-americana, da qual provêm os trabalhos mais significativos, e a literatura brasileira. A revisão restringe-se, portanto, à produção norte-americana considerada de referência, ao passo que a brasileira engloba autores com produção significativa relacionada à teoria pós-tonal em geral, não necessariamente sobre espaço de encadeamentos. Há também um levantamento de produção bibliográfica pessoal exclusivamente sobre o tópico e um breve memorial de orientações relativas ao tópico geral de teoria pós-tonal. Ainda que haja trabalhos esporádicos em outros países, o grosso da produção é essencialmente norte-americana ou derivada dela, mesmo no caso da literatura brasileira. Esta, por razões óbvias, será revisada, mas ficará restrita aos aspectos pedagógico, analítico e teórico.

Importante mencionar aqui a acepção do termo “encadeamento” conforme aparece nesta tese. O termo inglês *voice-leading* é literalmente traduzido por condução de vozes. Entretanto, na tradição da língua portuguesa, costuma-se usar o termo encadeamento de acordes para nomear o processo de organizar vozes melodicamente independentes conforme o contexto harmônico, ou seja, de conduzir uma nota de um acorde para outra nota de outro acorde resultando em linhas melódicas, que é a base da tradição harmônica ocidental. Assim, ambos os termos se referem ao mesmo processo e, obviamente, seguir-se-á, portanto, a tradição da língua portuguesa.

LITERATURA NORTE-AMERICANA

O ponto de partida para a modelagem do espaço de encadeamentos proposta nesta tese fundamenta-se em grande parte na configuração proposta para tricordes por Straus (2005a).⁶ Os pressupostos que antecedem o modelo mencionado estão em Lerdahl (1988), Morris (1998) circundado por Cohn (1996 e 1997) e Lewin (1996).

A concepção de espaços de notas surge em um artigo de Lerdahl (1988), intitulado “Tonal Pitch Space” (resultado de aprofundamentos de aspectos teóricos abordados em *A Generative Theory of Tonal Music*, escrito em parceria com Jackendoff), direcionados a questões de modelagem de espaços tonais. Na esteira de pesquisadores ligados à psicologia cognitiva, explicitamente Longuet-Higgins e Shepard, que propuseram teorias de relações tonais

⁶ A tradução da segunda edição de *Introduction to Post-Tonal Theory* integra minha tese de doutorado (Bordini, 2006) e a tradução da terceira edição foi publicada por EDUFBA/UNESP (ver Straus, 2013).

modeladas topologicamente,⁷ e reconhecendo a colaboração de Krumhansl em seu trabalho, Lerdahl propõe o seu espaço tonal de notas como solução para os dois problemas com os modelos disponíveis à época observando que são: "too symmetrical and they only address one level of pitch description",⁸ equacionando com o seu modelo "pitch space, tonal hierarchy, and stability conditions" (1988, p. 317).⁹

O artigo de Morris (1998, p. 177)¹⁰ intitulado "Voice-Leading Spaces", discute todas as abordagens publicadas até aquele momento e dirige o foco do seu estudo para a música atonal e serial que, em princípio, não segue o conceito tradicional de encadeamentos. Seu artigo divide-se em três partes, contendo na primeira as limitações do que ele chama de "total voice-leading" (encadeamentos totais) e uma taxonomia para os movimentos contrapontísticos; a segunda parte examina as generalizações de Cohn sobre a *Tonnetz*¹¹ de Riemann, algo que ele havia previamente chamado de "compositional space"¹² (espaço composicional), implementando agora um outro tipo de espaço designado de "two-partition graphs" (gráficos de bipartição) para chegar a uma "collection of voice-leading spaces, a new category of compositional space";¹³ e, na terceira parte, Morris descreve "methods that allow one to construct voice-leading spaces of any degree of complexity or closure".¹⁴

Destaca-se aqui o algoritmo de Morris (1998, p. 205), que utiliza *t-matrices* (matrizes de transição) e regras de restrições para gerar os encadeamentos. Para quaisquer dois conjuntos, se constrói uma matriz de transição para cada um e uma matriz de transição adicional para a inversão do primeiro conjunto; para cada matriz, um ponteiro variando de 0 a 11 executa todas as somas permitidas; se um subconjunto da matriz de transição contém somente somas permissíveis então aquele subconjunto define um encadeamento por T_n (transposição) ou T_nI (inversão) de um para outro.

O termo *parsimonious* (parcimonioso) foi inicialmente usado por Cohn (1995, p. 1), que em uma nota de rodapé (p. 62) explica que "the term 'parsimony' is used in this context in

⁷ O modelo topológico descrito apresenta configuração toroidal relacionando notas e funções harmônicas.

⁸ Muito simétricas e que endereçam apenas um nível de descrição das notas.

⁹ Espaço de notas, hierarquia tonal e condições de estabilidade.

¹⁰ Antes do artigo de Morris (1998), há muita literatura sobre as abordagens aos problemas de encadeamentos tonais derivados das teorias de Riemann. Essas abordagens ditas neo-riemannianas estão fora do escopo deste trabalho por tratarem de um subconjunto do espaço atonal apenas.

¹¹ "Redes de notas" em referência a malhas gráficas primeiramente descritas por Euler em 1937 e usadas posteriormente por Hugo Riemann.

¹² Em um artigo anterior, Morris (1995) examina esses espaços e "other territories" (outros territórios).

¹³ Coleção de espaços de encadeamentos, uma nova categoria de espaço composicional.

¹⁴ Métodos que permitem construir espaços de encadeamentos de qualquer grau de complexidade e proximidade.

Hostinský 1879, 106. In Schoenberg's writings, the same principle is referred to as the 'law of the shortest way.' See Schoenberg 1983 (1911), 39. For a formulation of this 'law' dating from the late seventeenth century, see Masson 1967 (1694), 47".¹⁵ Esse seu artigo amplia as relações triádicas a partir do modelo proposto por Lewin em obras publicadas na década de 1980, "using operations adapted from the writings of the turn-of-the-century theorist Hugo Riemann".¹⁶

Cohn (1998, p. 285 e 288) explica e introduz o conceito de *sum class* (classes de somas) e reconhece que este lhe foi sugerido por Jack Douthetti (idem, p. 296) em correspondência, mencionando trabalhos antecessores de Roeder (1984, p. 158) e particularmente Cook (1998) que estudou em profundidade o grupo de transformações investigadas por Cohn. Posteriormente, Roeder (1987) desenvolve representações geométricas para séries de classes de notas.

O modelo tridimensional de Cohn (2003) para os tetracordes surge como solução para espaços mais complexos em que há conexões em múltiplas direções, trazendo contribuições da geometria para os estudos acerca do espaço de encadeamentos.

Cook (2005) estudou exaustivamente as operações envolvidas no espaço de encadeamentos. As operações básicas compreendem a adição ou subtração de um semitom a apenas um elemento de um conjunto ou classe de conjuntos.

Em artigo seminal de apenas quatro páginas, Callender, Quinn e Tymoczko (2008) trouxeram definitivamente a geometria para o fulcro dos estudos sobre espaços de encadeamentos propondo um modelo geral que pretende abranger tanto a música tonal quanto a atonal. Identificaram cinco tipos principais de transformações musicais: **O** (deslocamento de oitava), **P** (permutação), **T** (transposição), **I** (inversão) e **C** (mudança de cardinalidade).

Tymoczko (2008, p. 251), a partir de dois artigos de Quinn, considera "two ways to model distance (or inverse similarity) between chord types, one based on voice leading and the other on shared interval content".¹⁷ As contribuições de Tymoczko (2011) consolidaram o modelo geral em seu livro *A Geometry of Music*, no qual ele identifica cinco características da música ocidental e não ocidental, do passado e do presente: 1) movimento melódico por grau conjunto;

¹⁵ O termo "parcimônia" é usado neste contexto em Hostinský 1879, 106. Nos escritos de Schoenberg o mesmo princípio é referido como a "lei do caminho mais curto". Ver Schoenberg 1983 (1911), 39. Para uma formulação desta "lei" datando do final do Século XVII, ver Masson 1967 (1694), 47.

¹⁶ Usando operações adaptadas dos escritos do teórico da virada do século Hugo Riemann.

¹⁷ Duas maneiras de modelar a distância (ou similaridade inversa) entre tipos de acordes, uma baseada em encadeamentos e outra no conteúdo intervalar compartilhado.

2) consonância acústica; 3) consistência harmônica; 4) macro-harmonia limitada; e 5) centricidade (p. 4).

Um dos muitos problemas enfrentados por autores que buscam representar espaços de encadeamentos relaciona-se com a métrica, no sentido de comparação entre a grandeza de distância entre coleções. Tymoczko (2011, p. 397-400) discorre sobre três possíveis métodos: 1) comparação entre o maior elemento de cada coleção (que ele chama de “largest-distance-metric” (métrica da maior distância); 2) somar as distâncias das duas coleções (que ele chama de “taxicab metric” (métrica de taxi));¹⁸ e 3) tratar o conjunto de distâncias como uma série de coordenadas em uma linha do espaço euclidiano (métrica euclidiana). Argumenta ele que todos os métodos são razoáveis e que não há razão para escolher um ou outro e endereça uma nota de rodapé na qual observa que Straus (2003) escolheu o método “taxicab” e Callender (2004) o método da distância euclidiana (p. 398). Em seguida explica o seu método que distribui os possíveis encadeamentos em uma tira de Möbius, alertando que não se aplica ao cruzamento de vozes já que estes modificam a distância entre as coleções.

Tymoczko (2018), em artigo publicado em periódico brasileiro (*MusMat*), partindo de trabalhos anteriores, aborda a interação entre esquemas de encadeamento em termos de: “simple mathematics to analyze a not-so-simple collection of musical patterns in which a single voice leading is repeatedly reapplied” (p. 109).¹⁹ Há um resumo em que explica matematicamente os conceitos de *pitch* (nota), *pitch classes* (classes de nota), *path* (caminho) e finalmente define o espaço de encadeamentos como “a multiset of paths in pitch-class space, determining how the notes of one chord move to those of another”.²⁰

Estudos recentes incluem: Robinson (2009), que trata especificamente do problema dos *multisets* em sua tese de doutorado, e Lundberg (2012, p. iv), também em tese de doutorado que “desenvolve ferramentas para a análise e representação de encadeamentos em música pós-tonal”. A definição de espaço de encadeamentos de Lundberg é: “an ordered series of mappings of one pitch-class set onto another” (*idem, ibidem*).²¹

¹⁸ Termo oriundo da geometria que se refere ao fato de que os taxis só podem percorrer ruas, sem poderem saltar sobre elas para ir pelo caminho mais curto.

¹⁹ Matemática simples para analisar uma coleção não tão simples de padrões musicais nos quais um único encadeamento é reaplicado repetidamente.

²⁰ Um multiconjunto de caminhos no espaço de encadeamentos determinando como as notas de um acorde movem-se para as de outro. [Ver definição de *multiset* na nota de rodapé no. 3.]

²¹ Uma série ordenada de mapeamentos de um conjunto de classes de notas em outro.

Apesar de estar entrelaçada com a literatura já revisada, a obra de Straus foi deixada para o final deste tópico por estar na base deste trabalho. A primeira edição de *Introduction to Post-Tonal Theory* é de 1990 e nela ainda não se encontra referências ao espaço de encadeamentos atonais. A segunda edição (2000) introduz apenas o tópico *Voice Leading* (p. 89-93) e discorre sobre os dois modelos principais de organização linear para a música atonal: o modelo associativo e o transformativo, este mais aprofundado já que há trabalhos do próprio Straus focados nesse modelo.

A terceira edição (2005) mantém o item *Voice Leading* (p. 107-110), retirando o modelo associativo, inserindo mais exemplos na análise do modelo transformativo e adicionando um novo item para *Atonal Pitch Space* (espaço de notas atonal), bastante resumido (p. 110-112), no qual aparece o seu modelo (p. 111) de *voice leading space for trichords* (espaço de encadeamentos para tricordes). A partir deste modelo, com autorização daquele autor, deu-se início ao processo de estudos do modelo apresentado nesta tese.

Finalmente, a quarta edição publicada em 2016 traz, além do modelo para tricordes (p. 180), um modelo para tetracordes (p. 181). O item *Voice Leading* (p. 174-178) foi dirigido para o estudo dos movimentos de *transformational voices* (vozes transformacionais) e o *Atonal pitch space* foi renomeado para *Set-class space* (espaço de classe de conjuntos) (p. 179-183).

Todas as edições trazem as obras de referência brevemente comentadas e quer-se crer interessante comparar a evolução dessas referências relacionadas com o espaço de encadeamentos. O Quadro 1 a seguir mostra as obras de referência mencionadas em cada edição. As obras de referência estão apenas relacionadas com autor, título, meio e ano.²² As páginas correspondentes às referências nas sucessivas edições permitem a sua verificação mais completa.

Quadro 1 – referências sobre espaço atonal de encadeamentos.

Edição	Páginas	Autor, título, editora, ano	Comentários
1ª.			Não há menção aos espaços.
2ª.	94	Alan Chapman, <i>Some Intervallic Aspects of Pitch-class Set Relations</i> , JMT , 1981. Allen Forte, <i>New Approaches to the Linear Analysis of Music</i> , JAMS , 1988. _____, <i>Concepts of Linearity in Schoenberg's Atonal Music: A Study of the Opus 15 Song Cycle</i> , JMT , 1992.	Abordagens ao encadeamento pós-tonal do ponto de vista associativo.

²² Abreviaturas: **JMT**: Journal of Music Theory; **JAMS**: Journal of the American Musicological Society; **MTS**: Music Theory Spectrum; **PNM**: Perspectives of New Music; **Ph.D**: tese de doutorado (acrônimo da Universidade); **C**: capítulo de livro ou artigo em coletânea; **MTCP**: Music Theory in Concept and Practice, **MTO**: Music Theory Online. **S**: Science, Título em negrito: livro completo.

		Christopher Hasty, On the Problems of Succession and Continuity in Twentieth-Century Music, MTS , 1986. Joseph N. Straus, A Principle of Voice Leading in the Music of Stravinsky, MTS , 1982.	
		David Lewin, Transformational Techniques in Atonal and Other Music Theories, PNM , 1982-3. _____, Some Ideas about Voice Leading between Pcsets, JMT , 1998 Shaugn O'Donnell, Transformational Voice Leading in Atonal Music, Ph.D (CUNY), 1977. John Roeder, A Theory of Voice Leading for Atonal Music, Ph.D (Yale), 1984. _____, Harmonic Implications of Schoenberg's Observations of Atonal Voice Leading, JMT , 1989. _____, Voice Leading as Transformation, C , (Ovenbird Press), 1995,	Abordagens ao encadeamento pós-tonal de um ponto de vista transformacional.
		Henry Klumpenhower, A Generalized Model of Voice-Leading for Atonal Music, Ph.D (Harvard), 1991. Joseph N. Straus, Voice Leading in Atonal Music, C , (University of Rochester Press), 1997.	Uma obra importante para Straus e sua própria produção.
3 ^a .	113	Robert Morris: Compositional Spaces and Other Territories, PNM , 1995. _____, Equivalence and Similarity in Pitch and Their Interaction with Pcset Theory, JMT , 1995. _____, Voice-Leading Spaces, MTS , 1998.	Abordagens ao encadeamento pós-tonal: são mantidas todas as referências da edição anterior e incluídos três artigos de Morris.
		Joseph N. Straus, Uniformity, Balance, and Smoothness in Atonal Voice Leading, MTS , 2003.	As próprias visões de Straus incluem um novo artigo.
		Fred Lerdahl, Tonal Pitch Space , Oxford University Press, 2001. Richard Cohn, A Tetrahedral Graph of Tetrachordal Voice-Leading Space, MTO , 2003.	O termo “espaço de notas atonal” é adaptado de Fred Lerdahl que também contém uma discussão do encadeamento pós-tonal.
4 ^a .	226-227	Joseph N. Straus, Total Voice Leading, MTO , 2014.	Abordagens ao encadeamento pós-tonal. Todas as referências são agrupadas e mantidas. Há só essa inclusão na seção dos trabalhos de Straus.
		Joseph N. Straus, Voice Leading in Set-Class Space, JMT , 2005. Clifton Callender, Ian Quinn, and Dimitri Tymoczko, Generalized Voice-Leading Spaces, S , 2008. Dimitry Tymoczko, A Geometry of Music: Harmony and Counterpoint in the Extended Common Practice , Oxford University Press, 2011.	Representações espaciais de encadeamentos entre conjuntos de classes de notas.

Observa-se a partir de 2003 um renovado interesse em espaços de encadeamentos, destacando-se a representação espacial do espaço de encadeamentos para tetracordes de Cohn

e um novo impulso com o artigo de Callender, Quinn e Timoczko, que culmina com *A Geometry of Music*. Representações modeladas para penta e hexacordes foram estudados no que se refere às suas propriedades, mas não há publicações sobre sua configuração.

LITERATURA BRASILEIRA

A literatura nacional relacionada à Teoria pós-tonal pode ser genericamente direcionada para quatro categorias: abordagens analíticas, compositivas, pedagógicas e teóricas (no sentido de modelagem sistemática). Sobre o espaço atonal de encadeamentos, há poucos trabalhos teóricos envolvendo modelagens sistemáticas e, especificamente, modelos de espaços atonais de encadeamentos. Na revisão da literatura nacional, elenca-se alguns trabalhos mais relevantes, a maioria relacionada à teoria pós-tonal em geral, sem vinculação direta com espaços de encadeamento e apenas indiretamente relacionados a esta tese, já que o espaço de encadeamentos atonal se apresenta como subtópico da teoria pós-tonal. Também estará fora do escopo desta revisão os aspectos ligados à composição musical, mesmo que usando técnicas relacionadas ao espaço de encadeamentos. Ainda que a grande maioria dos teóricos seja antes de tudo constituída por compositores, não haveria espaço nesta revisão para abordar a plêiade de obras tanto de outros compositores, mormente brasileiros, quanto de suas obras originais.

A introdução da Teoria Pós-tonal no Brasil está intimamente relacionada ao trabalho pioneiro de Ilza Nogueira. Como ela própria registra no prefácio à edição brasileira de *Introduction to Post-Tonal Theory* (Straus, 2010, p. ix-xi): “em 1990, enquanto realizava um estágio de Pós-Doutoramento em Teoria da Música no Departamento de Música da Universidade de Yale, tive a oportunidade de assistir ao curso de ‘Teoria e Análise da Música Atonal’ do Professor Joseph N. Straus” (p. ix), portanto, no ano de lançamento da primeira edição, embora seu primeiro contato com a teoria tenha se dado em 1983 “enquanto estudante de pós-graduação (doutorado em composição) na Universidade Estadual de New York em Buffalo, [...] numa disciplina ministrada por John Clough, trilhada sobre o citado livro de Rahn com alguns desvios ao livro de Forte” (p. ix).²³

No campo da análise musical, seu primeiro trabalho publicado – e quer-se crer tenha sido o primeiro em língua portuguesa no Brasil – data de 1988. O artigo de Nogueira (1988) analisa o Opus 19/6 de Schoenberg, demonstrando a “aplicação da teoria dos conjuntos associada ao método ‘distributivo’ ... [em que] a música é vista como uma sequência de elementos sonoros

²³ Os livros citados são: *Basic Atonal Theory* de John Rahn (Longman, 1980) e *The Structure of Atonal Music* de Allen Forte (YUP, 1973).

governados por certas regras de distribuição ... que se associam uns aos outros, complementando-se ou excluindo-se” (p. 57). Depois de identificar o conjunto referencial, faz um escrutínio de suas relações estruturais em cada segmento formal da peça apoiando-se em gráficos e exemplos musicais. Ao final, há notas de rodapé explicando os termos: classe de nota (*pitch class*), forma padrão (*normal form* ou *normal order*), o significado de alguns símbolos como parênteses, chaves e ângulos, a indicação de transposição T_n e classes intervalares (*interval class*) (p. 71-72), terminologia talvez desconhecida da maioria da comunidade acadêmica à época, tendo sido ela, provavelmente, a primeira a traduzir termos importantes para a teoria.

Seu papel na consolidação da teoria pós-tonal como ferramenta para análise de música não tonal e seu ensino em nível superior²⁴ reveste-se de importância ímpar por

ter sido a primeira docente a aplicar e divulgar “Introdução à Teoria Pós-Tonal” no Brasil, pois já em agosto de 1991, lecionava “Teoria e Análise da Música Pós-Tonal” no Curso de Pós-Graduação – Mestrado em Música da UFRGS, como Professor Visitante. A partir de então, durante a década de 1990, introduzi o livro na maioria dos programas de pós-graduação em música no país: UFRJ, UNI-RIO, UFBA, UFGO e UFPB (Straus, 2010, p. x).

Nogueira exhibe em sua produção importantes trabalhos tanto teóricos quanto analíticos dentre os quais se destacam o livro *Ernst Widmer: Perfil Estilístico* (1997) e a organização da série Marcos Históricos da Composição Contemporânea na Bahia, projeto de pesquisa iniciado em 2000 e ainda ativo, que contém notas analíticas em que aplica a teoria dos conjuntos de classes de notas.²⁵ A partir dos anos 2000, seus interesses dirigem-se também “para aplicações de teorias da semiótica em Música (com base em Peirce) e, particularmente, para as teorias da narratividade em música, onde, algumas vezes, busca a interlocução com a teoria psicanalítica de Jacques Lacan”.²⁶ Daí resulta o seu capítulo intitulado “Narratividade em Música: a entrada da análise na pós-modernidade” (p. 193-206), escrito para a publicação de *Teoria e Análise Musical em Perspectiva Didática* (2017), com organização sua, incluindo ensaios sobre temas discutidos no II Congresso da Associação Brasileira de Teoria e Análise Musical (TeMA) da

²⁴ De agosto a outubro de 1991, Ilza Nogueira participou como professora visitante do Mestrado em Música da UFRGS, lecionando a disciplina “Pesquisa Aplicada à Música”, com o tópico “Teoria e Análise da Música Pós-Tonal” e em setembro do mesmo ano, durante o IV Encontro da ANPPOM em Porto Alegre, apresentou comunicação oral intitulada “A ambiguidade como princípio estrutural na linguagem pós-tonal de Ernst Widmer”. Este texto foi publicado posteriormente em 1992 com o título “Ambiguidade e contextualidade: princípios fundamentais da linguagem pós-tonal de Ernst Widmer” [informação colhida em mensagem eletrônica privada].

²⁵ As obras analisadas por Nogueira são: *Officium Sepulchri* e *Rumos* op. 72 de Ernst Wiedmer, *Nu* de Jamary Oliveira, *Trio I* de Lindemberg Cardoso e *Trio Metamorfose* de Fernando Cerqueira. Disponível em: http://mhccufba.ufba.br/SISMHCC/mhcc_index.php?idioma=pt&secao=1

²⁶ Texto colhido em mensagem eletrônica privada.

qual é membro fundador, tendo assumido a primeira presidência e a organizado institucionalmente.

Com intensa atividade no Programa de Pós-graduação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Maria Lúcia Pascoal lecionou disciplinas de técnicas de análise incluindo a teoria pós-tonal a partir de 1992. Sob sua orientação, destaca-se a dissertação de mestrado de Adriana Lopes Moreira, *A poética nos 16 Poesilúdios para piano de Almeida Prado: Análise musical* (2002), em que utiliza conceitos da teoria para analisar estruturas acordais (ou acórdicas, como queiram) e escalares, trazendo explicações sobre termos técnicos (p. 27-33) a partir de Straus (2000).

Trabalhos relacionados à teoria neo-riemanniana não serão comentados extensivamente já que são dirigidos a aspectos particulares de encadeamentos de tríades e funções tonais, um subconjunto pequeno do espaço atonal, mas menciona-se alguns trabalhos importantes. Reforça-se o papel importante da Associação Brasileira de Teoria e Análise (TeMA) e do *Brazilian Journal of Music and Mathematics (MusMat)* como fomentadores e consolidadores da produção teórico-analítica no Brasil como se pode verificar pela veiculação da produção mais recente na área.

Com relação à teoria neo-riemanniana destaca-se o trabalho de Paulo Tarso de Salles (2016) que estuda distâncias tonais e relações entre ciclos octatônicos e hexatônicos. Albuquerque e Salles (2016) constroem redes de projeções por inversão e relações entre *tonnetze*. Taddei (2016) aplica análise neo-riemanniana a uma obra de Nepomuceno. Recentemente, Salles (2020) revê “some aspects of Forte’s theory [sobre os *Genera*], along with some studies on voice leading developed in the last three decades” (p. 67).²⁷ Seu gráfico contém os “22 sets obtained from the augmented trichord (048), excluding those 11 ones with cardinality higher than 6” (p. 68)²⁸ e mostra algumas características específicas tais como setas indicando o movimento parcimonioso entre os conjuntos de classes de notas conforme sugerido por Straus (2005b). Daí surge sua ideia de “generating a model of voice-leading zones, according to Richard Cohn’s model”.²⁹ Em seguida aplica o modelo na análise de obras de Villa-Lobos.

²⁷ Alguns aspectos da teoria de Forte, junto com estudos sobre encadeamentos desenvolvidos nas últimas três décadas.

²⁸ 22 conjuntos obtidos do tricorde aumentado (048), excluindo os 11 com cardinalidade maior do que 6.

²⁹ Gerar um modelo de zonas de encadeamento, de acordo com o modelo de Richard Cohn.

Trabalhos teóricos e de modelagem podem ser encontrados em Rodolfo Coelho de Souza (2019), outro pioneiro na aplicação de teoria pós-tonal no Brasil. Em recente artigo, implementa uma função computacional (PCORD) para prover uma tabela com todas as formas primas relacionadas à função que é então aplicada à análise de excertos musicais de Hans Otte, Villa-Lobos e dois seus. O artigo investiga ainda o “conteúdo harmônico das classes de conjunto usando PCORDs de cardinalidade 3 e as conexões PCORD no espaço de condução parcimoniosa de vozes em classes de conjuntos com cardinalidade 3 a 9” (p. 47).

Os modelos de espaços de encadeamentos parcimoniosos de Coelho de Souza estão detalhados e apresentados em forma esquemática (não topológica), em que se verifica a sua solução para a representação dos espaços. Conforme constata o autor, “while the complexity of the problem of plotting a space of parsimonious voice-leading seems to increase when we consider set classes of higher cardinality, with PCORD the complexity remains more or less the same” (p. 69).³⁰

Carlos Almada (2019 e 2020) apresenta dois trabalhos relacionados ao tópico, sendo um voltado para o estudo de variações através de abordagem transformacional e outro sobre espaço parcimonioso aplicado à música popular respectivamente. Um modelo de representação geométrica de *Tonnetze* para tríades e tétrades é apresentado por Almada (2017) “como um plano infinito coberto por pontos (representando classes de alturas), dispostos de acordo com os eixos x (terça maior ascendente) e y (terça menor descendente), ambos considerando a operação módulo 12” (p. 2). A partir daí, define o que ele chama de “tetrarmônios” formados pelo acréscimo sucessivo de quadrados nas três direções possíveis a partir de uma unidade referencial (p. 6) que são um subconjunto de *tetraminos*, “figuras geométricas formadas por quatro quadrados adjacentes” (p. 3).

Liduíno Pitombeira (2020) traz um estudo detalhado, lastreado em literatura abrangendo ciência de sistemas e sistemas composicionais, descrevendo as quatorze operações usadas e aplicadas aos parâmetros e materiais em seu sistema de modelagem (p. 49) e exemplificando extensivamente três delas. Esse artigo resume sua longa trajetória principalmente advinda de projetos de pesquisa iniciados em 2009 que, embora não diretamente associados a espaços de encadeamentos, abordam sistemas aplicados à composição com uso de ferramentas computacionais. Seu trabalho de pesquisa e suas orientações acadêmicas transitam por

³⁰ Enquanto a complexidade do problema de desenhar um espaço de encadeamentos parcimoniosos parece aumentar quando consideramos classes de conjuntos de cardinalidade mais alta, com PCORD a complexidade permanece mais ou menos a mesma.

processos estocásticos, *Gestalt*, música espectral, teoria dos jogos e análise intertextual, extraíndo deles uma metodologia denominada modelagem sistêmica em função da interação entre sistemas composicionais. Como resultado, há o artigo de Braga *et al.* (2020), em que os autores (incluindo o próprio Pitombeira) descrevem uma “metodologia de formalização pré-composicional que, partindo de diretrizes de manipulação paramétrica, possibilita a geração de repositórios composicionais e o planejamento estrutural desses repositórios com o objetivo de gerar obras musicais organicamente coerentes” (p. 2).

Reserva-se aqui um espaço especial para referenciar o trabalho de Jamary Oliveira e, muito especialmente, o seu Processador de Classes de Notas (PCN), aplicativo que permite operações com classes de notas, pelo qual recebeu o prêmio de Pesquisador do Ano de 1991, concedido pela Fundação de Apoio à Pesquisa e Extensão da Universidade Federal da Bahia. A primeira versão do PCN foi lançada em 1998 – embora estivesse em desenvolvimento desde 1990 – com interface em português e inglês, foi escrita em linguagem PASCAL orientada a objetos, com interface para sistema operacional Windows. Devido a mudanças no sistema operacional do Windows, uma segunda versão incluindo a interface também em espanhol foi disponibilizada em 2001. Novas modificações no sistema operacional mencionado, particularmente no endereçamento de sons MIDI, não reconhecem mais as instruções do PCN e atualmente não se pode mais ouvir o resultado das operações. A documentação do PCN está descrita detalhadamente no livro *Informática em Música: o parâmetro altura* (Oliveira, 1995). Todas as operações para conversão dos resultados em forma prima foram feitas com o PCN, cuja confiabilidade está comprovada por Bordini (1994d).

Faz-se necessário ressaltar a importância de Jamary Oliveira como precursor no ensino e divulgação da teoria pós-tonal no Brasil, ainda que muitas vezes essa importância não seja mencionada por não haver fontes oficiais publicadas. Oliveira menciona em um relato para uma classe do Departamento de Música da Universidade do Texas em 1983, e em mensagens incorporadas à tese de doutorado de Bordini (2003), já ter conhecimento do modelo de inversão estabelecido por Lewin (1987, p. 50-56). Desde a programação do aplicativo SÉRIE, Oliveira já usava a notação com $Dó = 0$, conforme se pode comprovar em seu artigo para a revista *ART* 002 (1981), portanto, se havia alguém acompanhando o surgimento da teoria e aplicando seus pressupostos, era Oliveira.

O algoritmo de Oliveira revela-se divergente em relação à determinação de formas primas, conforme descrito na tese de Bordini (2003, p. 44) e na tradução da terceira edição do

livro de Straus (2010, p. xiv). Esta e outras características do PCN estão comentadas na tese mencionada às páginas 42 a 46; um tutorial ilustrando com exemplos as operações do PCN estão descritas nas páginas 48-58.

Encerra-se esta revisão da literatura nacional com o texto escrito por Oliveira para a tradução brasileira do livro de Straus (2010, orelha do livro), que resume com sua característica concisão o que se esmiuçou até aqui:

entre as teorias da música desenvolvidas nos Estados Unidos da América, duas merecem atenção especial: a aplicação da Teoria dos Conjuntos e a aplicação da Geometria na análise e na composição musical, ambas utilizando conceitos originários da Matemática. Não há dúvida de que, pelo menos atualmente, a Teoria dos Conjuntos ocupa um lugar de destaque. A utilização da Teoria dos Conjuntos tem uma história longa, com a participação de inúmeros compositores e teóricos da música, entre os quais destacam-se Howard Hanson, Milton Babbitt e George Perle, pioneiros, Allen Forte, sistematizador e, John Rahn e Joseph Straus, seus principais divulgadores. Não é senão com a publicação da primeira edição da Introdução à Teoria Pós-tonal que o uso da teoria dos conjuntos ganhou destaque nas instituições de ensino estadunidenses, devido principalmente à sua clareza e objetividade.

PRODUÇÃO PESSOAL ESPECÍFICA

Se meu primeiro contato com a teoria dos conjuntos de classes de notas deu-se com a palestra de Nogueira no Programa de Pós-graduação em Música da Universidade Federal do Rio Grande do Sul em 1998,³¹ conforme documentei em minha dissertação de mestrado (1994a, p. 16), devo a Jamary Oliveira tudo o que pude aprender sobre a teoria enquanto seu orientando no Mestrado em Música da Universidade Federal da Bahia (UFBA) quando, além de sua orientação nos seminários de composição iniciados em agosto de 1990, tive o privilégio de participar do projeto de pesquisa em que ele desenvolveu o PCN, a partir de 1991.

Minha dissertação de mestrado (1994) contém uma revisão abrangente sobre teorias analíticas a partir do Século XX e a composição que a integra utiliza em seu terceiro movimento uma série dodecafônica e a análise do referido movimento faz uso extensivo, mas ainda insipiente, de análise pela teoria dos conjuntos de classes de notas (*pcset theory*).

Como resultado de seminários específicos sobre teoria pós-tonal durante o mestrado sob orientação de Oliveira, em que aprofundei os estudos sobre música não tonal, surgem três publicações relacionadas com análise usando como ferramenta a teoria dos conjuntos de classes de notas fazendo uso intensivo do PCN. A primeira é uma análise de uma peça de Oliveira:

³¹ Esse primeiro contato, além de revelador, foi seguido de outro que motivou a solicitação a Jamary Oliveira de um seminário especialmente dedicado à Teoria pós-tonal em 1992, provavelmente. Esse segundo contato deu-se através de outra palestra de Ilza Nogueira [Ver nota de rodapé 24].

Piano Piece (1986) e, a segunda, um complemento para esta análise (1994b e 1994c, respectivamente). A terceira (1994d) trata de testagens de eficiência e confiabilidade das operações do PCN. Embora publicado somente em 1997, data do mesmo período o início de uma análise de “Canção de Garoa”, de Bruno Kiefer, em que há tratamento analítico envolvendo teoria dos conjuntos.

Esses estudos culminam com a tese de doutorado (2003), na qual há uma revisão de literatura minuciosa sobre a teoria pós-tonal em geral e em apêndice está a tradução da segunda edição (2000) do livro de Straus: *Introdução à Teoria Pós-tonal*, que seria atualizada para a terceira edição (2005a) e publicada apenas em 2010. Há também uma composição musical para quarteto de cordas aplicando conceitos da teoria pós-tonal cuja partitura encontra-se nas páginas 97 a 103, e que está analisada mais detalhadamente e publicada nos Anais do XVI Congresso da Associação Nacional de Pesquisa e Pós-graduação em Música (Bordini, 2006).

Em 2011, iniciei o estágio pós-doutoral da Universidade da Califórnia em Santa Cruz (UCSC) com um projeto que previa o estudo de espaços de encadeamentos e malhas de inclusão como material para uso em um algoritmo que controlasse através de tabelas de transição (cadeias de Markov) a geração de material pré-composicional. Ao iniciar o estudo dos espaços de encadeamentos, diante das dificuldades encontradas, decidi mudar o projeto para restringi-lo à elaboração de um modelo de espaços de encadeamentos que permitisse uma visão, a meu ver, mais simples e prática, sem pretensões matemáticas e musicológicas complexas.

O coordenador do projeto na UCSC foi David Evan Jones, mas como o projeto previa programação de algoritmos para composição, participei em junho-julho de 2012 do *Workshop in Algorithmic Computer Music* (WACM), ministrados por David Cope, Peter Elsea e Paul Nauert. O projeto final que apresentei no *workshop* foi programado em LISP e continha partes do projeto de pós-doutorado com espaços de encadeamento, mas apenas parcialmente desenvolvidos, apresentado como palestra denominada: *Markov chains applied to series and referential collections*. A composição resultante do projeto, com título de *A grande feijoada*, foi apresentada no recital de encerramento do *workshop*.

Durante o período na UCSC, trabalhei com Matthew Mitchell, estudante de graduação que se interessou pelo projeto e colaborou com comentários importantes. Resultados completos para tri e tetracordes e parciais para penta e hexacordes foram efetuados e colocados *online* em página HTML com folha de estilo XSL. Este material atualizado e completado, será discutido e apresentado mais adiante nesta tese. Apresentei uma palestra para o Departamento de Música

da UCSC intitulada: *Overview of some compositional processes and a sample piece featuring pcset theory as applied to generate pre-compositional material*³² e, uma palestra para os estudantes da pós-graduação com título de *Binary Trees Applied to Algorithmic Composition*. A convite da chefe do Departamento de Música Amy Beal, participei de um recital com composições minhas para canto e piano junto a Andréa Daltro no teatro do *campus* da UCSC, em abril de 2012.

Como resultado do projeto de pós-doutorado, redigi um artigo em inglês³³ contendo o estudo completo para o espaço de encadeamentos para tricordes, que foi revisado por Straus a quem agradeço pelas incontáveis sugestões e correções. O artigo foi submetido para publicação no *Music Theory Online* e o parecer recomendava modificações com as quais não concordei e, portanto, não foi publicado. Este artigo foi posteriormente publicado com o título de “Expanded Atonal Voice-Leading Space for Trichords: an auxiliary model for generating pre-compositional material” pela revista *Musica Theorica* (2018) e será comentado mais adiante no capítulo sobre o espaço para tricordes.

Após o retorno a Brasil, motivado por divergências graves com os rumos do Curso de Música da UFBA, solicitei transferência para o Curso de Licenciatura em Música da Universidade Federal do Maranhão (UFMA) em 2014 e desde então publiquei dois artigos: aquele recém-mencionado (2018) e um relacionado à teoria pós-tonal em geral que aborda as configurações dos pedais da harpa de concerto em parceria com Jmary Oliveira (*in memoriam*) e Marcos da Silva Sampaio (2021)³⁴ que fez um estudo estatístico das 2.187 possíveis configurações.

As 2.187 configurações dos pedais resultam em 1.724 conjuntos distintos de classes de notas. Destes conjuntos, 1.315 podem ser alcançados, cada um, por apenas uma configuração de pedais, de forma que não há configuração alternativa para alcançá-los. Um total de 382 conjuntos podem ser alcançados por duas configurações de pedais cada um e 27 por quatro configurações de pedais diferentes (Oliveira; Sampaio; Bordini, 2021, p. 42).

ENSINO E ORIENTAÇÕES

A partir de 1994, quando iniciei a ministrar disciplinas no Curso de Graduação em Composição e posteriormente em seminários no Programa de Pós-graduação da UFBA, inclui

³² Esta palestra foi reapresentada em português para o PPGMUS da UFBA em 2012.

³³ Agradeço aos amigos Josef Sekon e Maria Davico pela revisão prévia do artigo.

³⁴ Orgulha-me sobremaneira ter escrito este artigo com Marcos Sampaio, constante colaborador e amigo e, com tristeza por ter sido o último trabalho com Jmary Oliveira, meu orientador no mestrado e doutorado, a quem devo o melhor do que pude aprender.

tópicos de teoria pós-tonal e orientei dissertações e teses com ênfase em tópicos relacionados a ela. Vários trabalhos de conclusão de curso abordaram tópicos de teoria pós-tonal e em outras oportunidades ministrei cursos de curta duração em Belém do Pará e Aracaju (2010) e em Santa Maria (2013), sendo este sob coordenação de Amaro Borges.

Dentre as orientações de dissertações de mestrado discorrendo sobre tópicos específicos de teoria pós-tonal estão as de Alexandre Mascarenhas Espinheira: *Tlpatacuntum: suíte sinfônica de gêneros baianos com a utilização da Teoria Pós-tonal na geração de material compositivo* (2007), Hermilo Pinheiro Santana: *Aplicação da teoria Pós-Tonal no poema sinfônico Na noite* (2010), Carlos Augusto Vasconcelos Pires: *Prolongando Contornos: Aplicação Composicional de Operações com Contornos* (2010), e Rodrigo Garcia: *Reconstruindo a passeata dos "50 mil": aplicação das funções da música de cinema e da teoria pós-tonal para a criação da trilha musical do documentário 1968 de Glauber Rocha* (2011). As teses de doutorado são as de: Alexandre Mascarenhas Espinheira: *A teoria pós-tonal aplicada à composição musical: um guia de sugestões compositivas* (2011) e a de Carlos Augusto Vasconcelos Pires: *Algoritmo composicional baseado na teoria dos contornos: propostas e aplicações* (2012), esta terminada como *upgrade* de sua dissertação de mestrado.

Espinheira já havia trabalhado com teoria pós-tonal em seminários de mestrado ministrados por mim e antes de sua dissertação veio a publicar um artigo intitulado “0258 (Lapa-Barroquinha)”, peça curta para piano em que usa apenas a classe de conjuntos 4-27 (0258). Após a conclusão do mestrado em composição seguiu produzindo trabalhos relativos ao tópico e apresentou uma revisão sistemática da literatura juntamente com propostas para ampliação do conceito no Congresso da ANPPOM (2010). Este trabalho já prenuncia sua tese de doutorado que demonstra sua preocupação com os aspectos de ensino e aplicação da teoria levando-o a confeccionar um guia de sugestões para composições baseadas em seus conceitos. Em 2019 publicou ainda outro artigo nos anais da ANPPOM e segue ensinando tópicos de teoria pós-tonal na UFBA, onde é professor.

Destaco dentre os hoje colegas que frequentaram minhas disciplinas de graduação, mas não foram orientados por mim, o trabalho de Pedro Ribeiro Kröger e Marcos da Silva Sampaio. Kröger³⁵ é professor e fundador do grupo de pesquisa GENOS do Programa de Pós-graduação em Música da UFBA e tem profícua produção teórica em desenvolvimento de *software* para análise de estruturas musicais e música eletrônica, bem como ensinando linguagens de

³⁵ Ver em: <https://www.pedrokroger.net/>

programação para músicos. Sua minuciosa análise de “Burocracia” (1994, p. 5-23), de Jamary Oliveira, está entre os primeiros trabalhos analíticos utilizando conceitos da teoria dos conjuntos de classes de notas sobre a obra deste e contém indicações de diferenças entre o manuscrito e a partitura publicada pela Ricordi, em 1969.

Como um de seus colaboradores no GENOS, Sampaio,³⁶ também professor da UFBA, destaca-se com pesquisa importante em um ramo da teoria pós-tonal designado como teoria dos contornos, tópico estudado em sua dissertação de mestrado (2008) e posteriormente ampliado em sua tese de doutorado (2012), sob orientação de Kröger. Também com grande experiência em programação de aplicativos para música, seus principais trabalhos de pesquisa, especificamente sobre teoria dos contornos, são: 1) *Contour Algorithm Review* (2016) em que ele e Kröger discutem problemas com algoritmos de redução de contornos e de equivalência de classes de formas primas demonstrando “how and why these algorithms fail, as well as how to fix the issues” (p. 83),³⁷ propondo algoritmos alternativos; e 2) *Contour Similarity Algorithms* (2018) em que o problema dos algoritmos de análise de similaridade de contornos melódicos é aprofundado. Neste artigo, Sampaio escrutina os diversos algoritmos e propõe dois novos, comparando-os em peças de Bach e Schumann e aplicando contornos gerados automaticamente, constatando a complexidade da tarefa e concluindo que o problema ainda persiste e demanda mais pesquisa.

Muitos autores e trabalhos importantes deixaram de ser mencionados, mas eles estão contemplados no capítulo sobre a “Teoria dos conjuntos no Brasil: uma visão historiográfica”, escrito por Ilza Nogueira e Maria Lúcia Pascoal, que integra o livro *Teorias estrangeiras no Brasil: migração, enculturação e aculturação*, organizado também por Ilza Nogueira, editado por Gabriel Navia e publicado pela Associação Brasileira de Teoria e Análise Musical, e lá suas trajetórias, produções e conexões estão descritas com abrangência e profundidade (Nogueira e Pascoal, 2024, p. 131-193).

Termina-se esta revisão constatando o fluxo gradual e ininterrupto de influências teóricas de origem norte-americana, trazidas, aplicadas e transmitidas por pioneiros ao Brasil, seguidas e disseminadas incessantemente até os dias presentes, resultando em profícua produção altamente especializada, à qual esta tese agrega-se como mais um elo.

³⁶ Ver em: <https://marcos.sampaio.me/publication/>

³⁷ Como e porque esses algoritmos falham, bem como consertá-los.

CAPÍTULO 2: METODOLOGIA E PADRÕES DE MODELAGEM

Antes de apresentar a metodologia e o modelo gráfico que representa o espaço atonal de encadeamentos, faz-se necessária uma digressão sobre os multiconjuntos de classes de notas (*pitch-class multisets*) abreviados por **mc-cn** daqui em diante, sobre as formas de representá-los, sobre suas formas primas e seus vetores classe-intervalares. O conteúdo está inserido aqui por estar relacionado muito mais com a metodologia a ser empregada do que com a revisão de literatura.

MULTICONJUNTOS

Esta abordagem aos multiconjuntos baseia-se em muito na tese de doutorado de Robinson (2009) que, sob orientação de Straus, aprofundou os estudos sobre as propriedades dos multiconjuntos e particularmente debruçou-se sobre seus problemas inerentes, particularmente os relacionados a formas primas, vetores classe-intervalares, notas comuns sob transposição e inversão, simetria, complementariedade etc.

Em princípio, por definição, “the pitch-class multiset (pcmset) is a collection in which pitch classes may appear as elements more than once and in which any single appearance of a pc represents one and only one instance of that pitch class” (Robinson, 2009, p. iv).³⁸ Depois de sua longa introdução, em que diferencia elementos de objetos (entre outros termos como *pitch-types*, *tokens* etc.), ele propõe duas definições mais elaboradas:

a pitch multiset is an unordered collection of pitch types (not necessarily distinct), in which each element denotes a single occurrence of its pitch-type. A pitch-class multiset is an unordered collection of pitch classes (not necessarily distinct), in which each element denotes a single representative of its pitch-class (Robinson, 2009, p. 21-22).³⁹

A diferença entre elementos e objetos faz-se necessária para distinguir não só a cardinalidade de um multiconjunto, mas também para identificar a classe de conjuntos que origina o multiconjunto. Por exemplo: o multiconjunto 001223 tem 6 elementos (é um hexacorde), mas tem apenas 4 objetos, sua origem é a classe 4-1 (0123).

³⁸ O multiconjunto de classes de notas (*pcmset*) é uma coleção na qual as classes de notas podem aparecer como elementos mais de uma vez e na qual qualquer aparição de uma cn [classe de notas] específica representa uma e somente uma instância daquela classe de notas.

³⁹ Um multiconjunto de notas é uma coleção não ordenada de tipos de notas (não necessariamente distintas), na qual cada elemento denota uma única ocorrência do seu tipo de nota. Um multiconjunto de classes de notas é uma coleção não ordenada de classes de notas (não necessariamente distintas), na qual cada elemento denota um único representante da sua classe de notas.

Como os multiconjuntos contêm mais de uma ocorrência de pelo menos um mesmo elemento, a representação de quantas repetições há na coleção é, na literatura tanto no campo da matemática quanto da música, outro problema. A quantidade de repetições de cada classe de notas é chamada de multiplicidade ou, conforme Robinson, “in a pcmultiset, the number of representatives of a certain pitch class (or the number of elements pointing to a certain object) is the multiplicity of that pitch class (or object)” (2009, p. 25).⁴⁰

Sobre as possibilidades de notação para representar multiconjuntos, há muitas opções. No campo da matemática, a representação pode ser expressa de forma multiplicativa, segundo Singh:

following Meyer and McRobbie, the use of square brackets to represent an mset has become almost standard. Thus, an mset containing one occurrence of a, two occurrences of b, and three occurrences of c is notationally written as $[[a; b; b; c; c; c]]$ or $[a; b; b; c; c; c]$ or $[a; b; c]_{1,2,3}$ or $[a^1; b^2; c^3]$ or $[a1; b2; c3]$, depending on one's taste and convenience (Singh *et alii*, 2007, p. 72).⁴¹

No campo da música, Robinson aponta que Robert Morris sugeriu no seu *Composition with Pitch-Classes* que a “multiplicity can be represented with superscripts. Such power notation appears as early as 1961 in Milton Babbitt’s ‘Set Structure as Compositional Determinant,’ representing multiplicity not of equivalent pcs, but of equivalent partitions of the aggregate” (Robinson, 2009, p. 25).⁴²

Adotar-se-á neste trabalho outra representação. Os multiconjuntos serão representados por sua forma prima, tradicionalmente escrita entre parênteses sem espaços separadores e a multiplicidade por subscritos separados por vírgulas, assim: $(01)_{3,1}$ representa a coleção $[0, 0, 0, 1]$, $(012)_{1,2,1}$ representa a coleção $[0, 1, 1, 2]$ e assim por diante.

Para chegar-se à forma prima dos multiconjuntos, há que antes obter-se a sua forma normal. Robinson encontra a forma normal seguindo o procedimento padrão, porém omitindo os dobramentos, mas diferencia a forma normal “verdadeira” da que ele chama de “derivada”, conforme mostra a Figura 1 adaptada de Robinson (2009, p. 28) a seguir. E como a forma prima

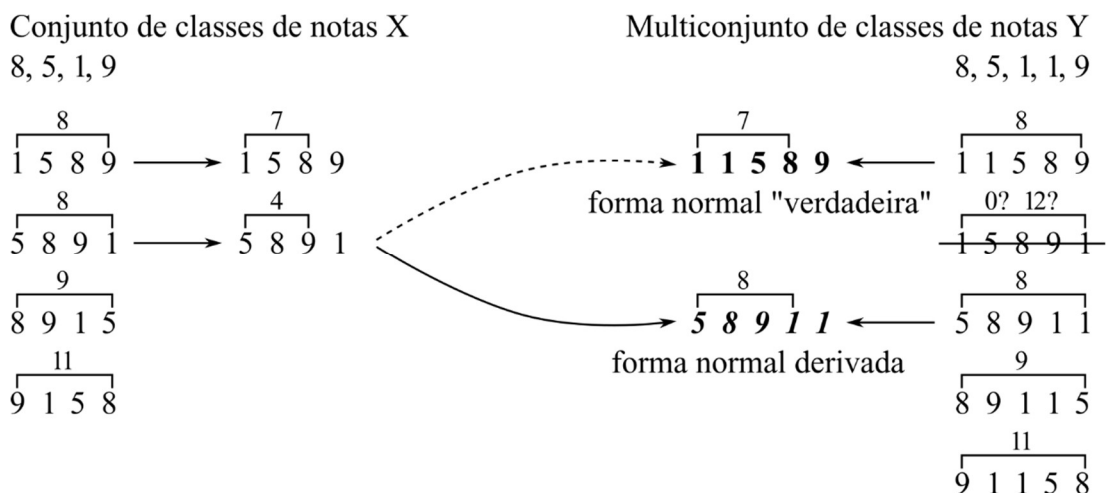
⁴⁰ Num multiconjunto de classes de notas, a quantidade de representantes de uma certa classe de notas (ou a quantidade de elementos apontando para um certo objeto) é a multiplicidade daquela classe de notas (ou objeto).

⁴¹ Seguindo Meyer e McRobbie, o uso de colchetes para representar um multiconjunto tem se tornado quase padrão. Assim, um multiconjunto contendo uma ocorrência de a, duas de b e três ocorrências de c é em notação escrito como $[[a; b; b; c; c; c]]$ ou $[a; b; b; c; c; c]$ ou $[a; b; c]_{1,2,3}$ ou $[a^1; b^2; c^3]$ ou $[a1; b2; c3]$, dependendo do gosto e conveniência.

⁴² Multiplicidade pode ser representada por sobrescritos. Essa notação com potências aparece já em 1961 no “Set Structure as Compositional Determinant,” de Milton Babbitt, representando multiplicidade não de pcs [*pitch-classes*], mas de partições equivalentes do agregado.

que representa a classe de conjuntos tradicionalmente é aquela mais compacta à esquerda e que começa com 0 (zero) dentre todas as transposições e inversões, assim também a forma prima dos multiconjuntos deve ser escolhida.

Figura 1 – forma normal “verdadeira” e derivada.



Fonte: adaptada de ROBINSON (2009, p. 28).

No exemplo da Figura 1, há um empate em duas das rotações e, no critério de desempate chega-se à forma normal da coleção 8, 5, 1, 9 que é: [5, 8, 9, 1]. Na coluna à direita, se a forma normal fosse feita com as repetições, no critério de desempate, a coleção 8, 5, 1, 1, 9 teria como forma normal “verdadeira” [1, 1, 5, 8 9]. Mas essa forma normal não corresponde àquela da coleção sem repetições. A forma normal que corresponde à forma normal da coleção sem repetições é a forma normal “derivada”. Assim, para chegar-se à forma prima, deve-se considerar a forma normal derivada, pois segundo Robinson:

either normal form, derived or true, may be preferable depending on analytical context, but when we consider prime forms (when we establish multiset classes), it will be even more important to maintain the clear relationship between pcset and related pcmultiset. We will want the ordering in the pcmultiset to ‘match’ that in the pcset regardless of doubling. Therefore, when we use “normal form” it is in the ‘derived’ sense (Robinson, 2009, p. 30).⁴³

⁴³ Tanto a forma normal derivada quanto a verdadeira, pode ser preferível a depender do contexto analítico, mas quando consideramos formas primas (quando estabelecemos classes de multiconjuntos), é ainda mais importante manter uma clara relação entre os conjuntos de classes de notas e os multiconjuntos de classes de notas relacionados. Queremos ordenar o multiconjunto de classes de notas de modo a “corresponder” àquele do conjunto de classes de notas a despeito dos dobramentos. Por isso, quando usamos a “forma normal” ela o é no sentido da “derivada”.

Para encontrar a forma prima que identifica a classe de multiconjuntos a que a coleção pertence, procede-se da mesma forma: retira-se as repetições, encontra-se a classe de conjuntos e reinsere-se a repetições correspondentes.

Entretanto, formas primas de classes de conjuntos diferem das classes de multiconjuntos. Para usar o mesmo exemplo de Robinson, a forma prima do multiconjunto 0046 é 0266 (que é a forma prima da inversão).⁴⁴ A forma prima da classe de conjuntos 026 tem agora novos parentes: 0266, 0226, 0026, etc. Segundo ele:

026 is the parent set class, and the multitude of others are the offspring multisets. A single parent can have an infinite number of offspring because the potential multiplicity of any object is infinite, but it is important to remember that a parent set class also can produce a single multiset class whose elements are each at a multiplicity of one” (Robinson, 2009, p. 32).⁴⁵

A questão da cardinalidade é outra preocupação quando se trabalha com multiconjuntos. A cardinalidade de um multiconjunto é dada pela soma da multiplicidade de cada elemento (objeto, na verdade). Por exemplo, a cardinalidade do multiconjunto cuja forma prima pai é $(01)_{2,1}$ é três, já que um dos dois elementos (objetos) está repetido. Diferentemente de Robinson, no escopo deste trabalho, as formas primas de multiconjuntos serão representadas pela forma prima pai entre parênteses como de praxe para as formas primas normais, também com o número de Forte, mas seguida dos indicadores de multiplicidade subscritos e separados por vírgulas para as formas primas dos multiconjuntos filhos. Assim, (024) é a classe pai do multiconjunto 000224, que pode ser representado por $(024)_{3,2,1}$, trata-se, portanto, de um hexacorde (cardinalidade 6).

Outra grande dificuldade refere-se ao tratamento dos intervalos de primeira justa (uníssonos)⁴⁶ que são exclusivos dos multiconjuntos, sua implicação no vetor classe-intervalar e, conseqüentemente, na comparação entre vetores que determinam graus de similaridade, complementariedade e sonoridade e, na manutenção de notas comuns sob transposição e inversão. Como o vetor intervalar de uma classe de conjuntos contém apenas seis posições: uma para cada classe de intervalos de 1 a 6, há que se incluir uma sétima posição para a classe de

⁴⁴ Robinson nota os multiconjuntos sem parênteses como está aqui, mas no corpo deste trabalho usar-se-á entre parênteses seguidos dos índices de multiplicidade subscritos e separados por vírgulas.

⁴⁵ 026 é a classe de conjuntos pai, e a infinidade de outros são os multiconjuntos filhos. Um único pai pode ter uma infinita quantidade de filhos porque o potencial de multiplicidade de qualquer objeto é infinito, mas é importante lembrar que uma classe de conjuntos pai pode produzir também uma única classe de multiconjuntos cujos elementos estão com a multiplicidade de um.

⁴⁶ Não se está considerando aqui evidentemente o unísono formado por cada classe de notas de um conjunto consigo mesma, como é usual.

intervalos 0 (zero) que corresponde à primeira justa (ou sua inversão, a oitava justa). Robinson (2009, p. 91) propõe separar a sétima posição (que na verdade é a primeira), com uma barra inclinada, assim, o vetor classe-intervalar de um multiconjunto, por exemplo (0012), é 1/320000. Adotar-se-á em vez da barra o hífen, assim, 1-320000.

O vetor classe-intervalar dos multiconjuntos corresponde à cardinalidade de qualquer classe de conjuntos normal. Por exemplo, tanto 012 quanto 001 têm três intervalos, tetracordes têm seis, pentacordes têm dez e hexacordes têm quinze.

Uma última observação, mas não menos importante, refere-se à forma prima preferencial para referenciar a classe pai que contém multiconjuntos filhos simétricos por transposição ou inversão. Robinson observa acerca de multiconjuntos filhos simétricos por inversão ou transposição (exceto T_0) que:

for example, 012 may generate the tetrachords 0012, 0112, and 0122. Through inversion, 0012 and 0122 can be shown to belong to the same multiset class, and 0012 is the preferred representative of that class. Preference is given to the higher multiplicity of the first object, 0. In the case of a tie, preference is given to multiplicity of the second object, and so forth (Robinson, 2009, p. 220).⁴⁷

Quando há essa situação, Robinson marca a forma preferida com um x e, nesses casos, a classe-intervalar repetida é diferente. Por exemplo o vetor de 0012 e 0122 é o mesmo: 1-320000, mas no primeiro caso a primeira justa é formada com a classe de notas 0 (zero) e no segundo é com a classe 2. Neste trabalho as “formas preferidas” não serão marcadas, os resultados das operações sempre serão apresentados com elas.

A partir do que se viu até aqui, alguns dados já podem ser revelados. As operações simples e duplas que resultam em multiconjuntos reduzem-se a 7 formas primas pais com 7 filhas para os tricordes; 18 pais com 42 filhas para tetracordes; 41 pais com 131 filhas para pentacordes e, 69 pais com 316 filhas para hexacordes. As operações com multiconjuntos de cardinalidade três, resultam nas seguintes formas primas pais: $(0)_3$,⁴⁸ $(0a)_{2,1}$ ou $(0a)_{1,2}$, com a variando de 1 a 6, mas como as formas $(00a)$ e $(0aa)$ estão relacionadas por inversão, somente as formas $(0a)_{2,1}$ são consideradas (são as preferidas, conforme se viu anteriormente). As operações com multiconjuntos de cardinalidade quatro resultam em: $(0a)_{2,2}$, $(0ab)_{2,1,1}$, $(0ab)_{1,2,1}$ e, $(0ab)_{1,1,2}$

⁴⁷ Por exemplo, 012 pode gerar os tetracordes 0012, 0112 e 0122. Por inversão, 0012 e 0122 podem ser mostrados como pertencentes à mesma classe de multiconjuntos e 0012 é a representação preferida daquela classe. A preferência é dada à mais alta multiplicidade do primeiro objeto, 0. No caso de um empate, a preferência é dada à multiplicidade do segundo objeto e assim por diante.

⁴⁸ Observe-se que $(1)_3$, $(2)_3$ etc. são todos, transposições de $(0)_3$.

(nenhuma operação resulta em $(0)_4$, mas seria perfeitamente possível) com a variando de 1 a 4 e b variando de 2 a 8. Quando as formas filhas estão relacionadas por inversão, a preferência é para a $(0ab)_{2,1,1}$. Mas há duas possibilidades de isso acontecer com tetracordes: ou $(0ab)_{2,1,1}$ e $(0ab)_{1,1,2}$ são simétricos ou, $(0ab)_{2,1,1}$ e $(0ab)_{1,2,1}$ são simétricos. Considerando apenas as possíveis composições⁴⁹ que resultam das operações com multiconjuntos de cardinalidade cinco obtém-se: $(0ab)_{3,1,1}$, $(0ab)_{1,3,1}$, $(0ab)_{1,1,3}$, $(0ab)_{2,2,1}$, $(0ab)_{2,1,2}$, $(0ab)_{1,1,2}$, $(0abc)_{2,1,1,1}$, $(0abc)_{1,2,1,1}$, $(0abc)_{1,1,2,1}$ e, $(0abc)_{1,1,1,2}$, com a variando de 1 a 3, b variando de 2 a 6 e c variando de 3 a 9. Os de cardinalidade seis resultam em: $(0abc)_{3,1,1,1}$, $(0abc)_{1,3,1,1}$, $(0abc)_{1,1,3,1}$, $(0abc)_{1,1,1,3}$, $(0abc)_{2,2,1,1}$, $(0abc)_{2,1,2,1}$, $(0abc)_{2,1,1,2}$, $(0abc)_{1,2,2,1}$, $(0abc)_{1,2,1,2}$, $(0abc)_{1,1,2,2}$, $(0abcd)_{2,1,1,1,1}$, $(0abcd)_{1,2,1,1,1}$, $(0abcd)_{1,1,2,1,1}$ e $(0abcd)_{1,1,1,2,1}$, com a variando de 1 a 3, b variando de 2 a 4, c variando de 3 a 5 e, d variando de 4 a 8. E nenhuma outra.

Como a quantidade de multiconjuntos filhos prolifera rapidamente conforme aumenta a cardinalidade, e considerando ainda que as operações duplas elevam ainda mais as conexões com multiconjuntos, o modelo de espaço proposto aqui fará uso de convenções de sinais, índices e abreviaturas descritas mais adiante pois, de outra forma, não haveria espaço suficiente para representar todas as possíveis conexões entre classes de conjuntos e multiconjuntos.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada para construir o *corpus* de dados consiste em passos progressivos e cumulativos seguindo a seguinte sequência: 1) elencar as classes de conjuntos em forma prima para cada cardinalidade: tricordes, tetracordes, pentacordes e hexacordes; 2) efetuar todas as operações simples e duplas para cada classe de conjuntos; e 3) colocar todos os resultados em forma prima.⁵⁰ A Tabela 1 a seguir dá uma dimensão da quantidade de classes de conjuntos, de operações possíveis para cada cardinalidade (dada pela soma das operações simples e duplas cujas quantidades respectivas estão entre parênteses) e os totais.

Tabela 1 – total de operações.

Cardinalidade	Quantidade de classes	Quantidade de operações	Total de operações
3	12	12 (6+6)	144
4	29	20 (8+12)	580
5	38	30 (10+20)	1.140
6	50	42 (12+30)	2.100

⁴⁹ Robinson (2009, p. 33-34) aborda em sua tese as possíveis composições (termo matemático que se refere às somas de inteiros que perfazem o mesmo resultado) de um número.

⁵⁰ Como cada resultado deve ser apresentado em forma prima, os totais da Tabela 1 são duplicados.

Totais gerais	129	104	3.964
----------------------	------------	------------	--------------

Fonte: dados do autor

Após a compilação dos dados inicia-se o processo de modelagem do espaço, seguindo-se as seguintes etapas: 1) ordenar as formas primas das classes de conjuntos em linhas horizontais em ordem crescente e, simultaneamente; 2) alinhar as colunas verticais em ordem crescente, sendo que cada linha é denominada de Latitude (**La**) e cada coluna de Longitude (**Lo**); 3) separar em Aglomerados (**A**) as classes de conjuntos que iniciam com os mesmos números; 4) conectar as classes de conjuntos com conectores diferentes conforme o tipo de encadeamento efetuado pelas operações, indicando-se quais operadores foram efetuados para cada caso; 5) listar as formas primas pais e filhas dos multiconjuntos; 6) exportar os gráficos finalizados em imagens PNG; e 7) compilar todos os dados obtidos em XML 2.0 com HTML 5.0 com transformação XSL 2.0 para acesso *online* gratuito.

Como a quantidade de dados é muito grande e proliferam muito rapidamente conforme aumenta a cardinalidade, divisou-se um sistema de organização de modo a facilitar não só a visualização, mas também a localização das classes de conjuntos distribuídas no espaço. Assim, as formas primas estão sempre organizadas em ordem crescente da esquerda para a direita e de baixo para cima e são agrupadas em aglomerados, sendo que os tricordes só têm um desses (A0), os tetracordes têm três (A01, A02 e A03), os pentacordes têm sete (A012, A013, A014, A015, A023, A024 e A034) e os hexacordes têm quatorze (A0123, A0124, A0125, A0126, A0134, A0135, A0136, A0145, A0146, A0234, A0235, A0236, A0245 e A0246). As Latitudes variam para cada aglomerado e seus âmbitos estão mostrados na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – latitudes e longitudes nos aglomerados.

Cardinalidade	Aglomerados	Latitude, Longitude	Classes no aglomerado
3	A0	1 a 4, 2 a 8	12
	A01	2 a 6, 3 a 8	17
4	A02	3 a 6, 5 a 8	9
	A03	4 a 6, 7 a 9	3
	A012	3 a 6, 4 a 8	13
5	A013	4 a 6, 6 a 9	9
	A014	5 a 7, 7 a 9	5
	A015	6, 8	1
	A023	4 a 6, 6 a 8	5
	A024	5 a 7, 8 a 9	4
	A034	5, 8	1
	A0123	4 a 7, 5 a 9	11
6	A0124	5 a 7, 6 a 9	8
	A0125	6 a 7, 7 a 9	5

A0126	7, 8	1
A0134	5 a 7, 7 a 9	7
A0135	6 a 7, 8 a 9	4
A0136	7, 9	1
A0145	6 a 8, 8 a 9	3
A0146	7, 9	1
A0234	5 a 6, 7 a 9	4
A0235	6 a 7, 8 a 9	2
A0236	7, 9	1
A0245	7, 9	1
A0246	7, 10	1
Totais gerais	25	129
		3.964

Fonte: dados do autor

Para acrescentar uma camada a mais de identificação rápida (talvez mais para buscas automáticas), cada classe de conjunto recebe uma espécie de *token* ou número de identidade com as seguintes especificações: cardinalidade, aglomerado, latitude e longitude no seguinte formato, por exemplo: C4A02La3Lo7 localiza um tetracorde que está no aglomerado 02 na latitude 3 e longitude 7 que, corresponde a classe de conjuntos 4-14 (0237).

As operações que definem os encadeamentos por semitom tradicionalmente são: somar ou subtrair um semitom. Assim, define-se as operações simples (serão assim denominadas) como **+1 OU -1**. Conforme mencionado anteriormente, o espaço atonal segundo aquelas operações é expandido pelo acréscimo de uma operação dupla: **+1 E -1**. Assim, as operações possíveis para cada cardinalidade entre as classes de conjuntos estão mostradas no Quadro 2. Vê-se lá que para cada elemento (**E**) de uma classe de conjuntos soma-se 1 ou diminui-se 1 semitom a cada operação simples e, para cada par de elementos soma-se 1 e simultaneamente diminui-se 1 semitom a cada operação dupla.

Quadro 2 – operações por cardinalidade.

Cardinalidade	Operações simples	Operações duplas
3	E1+1, E1-1	E1+1 e E2-1, E1-1 e E2+1
	E2+1, E2-1	E1+1 e E3-1, E1-1 e E3+1
	E3+1, E3-1	E2+1 e E3-1, E2-1 e E3+1
4	E1+1, E1-1	E1+1 e E2-1, E1-1 e E2+1
	E2+1, E2-1	E1+1 e E3-1, E1-1 e E3+1
	E3+1, E3-1	E1+1 e E4-1, E1-1 e E4+1
	E4+1, E4-1	E2+1 e E3-1, E2-1 e E3+1
		E2+1 e E4-1, E2-1 e E4+1
5	E1+1, E1-1	E1+1 e E2-1, E1-1 e E2+1
	E2+1, E2-1	E1+1 e E3-1, E1-1 e E3+1
	E3+1, E3-1	E1+1 e E4-1, E1-1 e E4+1
	E4+1, E4-1	E1+1 e E5-1, E1-1 e E5+1
	E5+1, E5-1	E2+1 e E3-1, E2-1 e E3+1
		E2+1 e E4-1, E2-1 e E4+1

		E2+1 e E5-1, E2-1 e E5+1
		E3+1 e E4-1, E3-1 e E4+1
		E3+1 e E5-1, E3-1 e E5+1
		E4+1 e E5-1, E4-1 e E5+1
6	E1+1, E1-1	E1+1 e E2-1, E1-1 e E2+1
	E2+1, E2-1	E1+1 e E3-1, E1-1 e E3+1
	E3+1, E3-1	E1+1 e E4-1, E1-1 e E4+1
	E4+1, E4-1	E1+1 e E5-1, E1-1 e E5+1
	E5+1, E5-1	E1+1 e E6-1, E1-1 e E6+1
	E6+1, E6-1	E2+1 e E3-1, E2-1 e E3+1
		E2+1 e E4-1, E2-1 e E4+1
		E2+1 e E5-1, E2-1 e E5+1
		E2+1 e E6-1, E2-1 e E6+1
		E3+1 e E4-1, E3-1 e E4+1
		E3+1 e E5-1, E3-1 e E5+1
		E3+1 e E6-1, E3-1 e E6+1
		E4+1 e E5-1, E4-1 e E5+1
		E4+1 e E6-1, E4-1 e E6+1
		E5+1 e E6-1, E5-1 e E6+1

Fonte: dados do autor

Como se pode ver, há um acréscimo substancial na quantidade de operações, já que as operações duplas, apesar das redundâncias – algumas delas irão resultar nos mesmos encadeamentos que as operações simples proveem –, proverão novas conexões que não são obtidas pelas operações simples. Uma delas em particular será abordada mais adiante.

A inclusão de multiconjuntos requer outro tipo de tratamento, já que aproximadamente metade das operações resultam neles (como se verá mais adiante). Para sua representação no espaço criou-se duas categorias de dados separando-se os resultados das operações simples das operações duplas. As operações simples sempre contêm uma quantidade menor de encadeamentos ao passo que, obviamente, as duplas os têm em maior quantidade e requerem, portanto, uma espécie de compressão. Assim, no espaço encontrar-se-ão dois conjuntos de dados relacionados aos multiconjuntos: uma tabela que codifica as formas primas pais e suas formas primas filhas ordenadas por multiplicidade e, no caso de não haver espaço suficiente para inseri-las todas, uma lista com seus códigos está inserida ao lado da tabela. Uma descrição mais completa será oferecida mais adiante.

Em um artigo anterior (Bordini, 2018), publicou-se cálculos completos (*total voice-leading space*) para tricordes. Cálculos completos para tetracordes também foram realizados, porém não foram publicados. Para esta tese, os cálculos para tetra, penta e hexacordes ficarão restritos às operações descritas no Quadro 2, pois cálculos completos elevariam exponencialmente a quantidade de dados. Só para se ter uma ideia, as operações para tricordes aumentariam de 144 para 288 e de tetracordes aumentariam de 580 para 2.262 operações.

Considerando que os resultados devem ser convertidos para formas primas, essas quantidades seriam duplicadas.

Na modelagem gráfica do espaço em tela, as classes de conjuntos estão inseridas dentro de círculos contendo a forma prima ao centro, o nome de Allen Forte acima da forma prima e a classe de somas abaixo (conforme mencionado no Capítulo 1). Esse número de classe de somas, além do que já se disse dele, ajuda a estabelecer equações para a localização das classes de conjuntos encadeadas como se verá mais adiante.

A título de registro das modificações ocorridas no processo de construção do espaço ora em apreço, comenta-se uma mudança de metodologia que nesta tese não será usada: a possibilidade de deduzir encadeamentos através de equações. As equações gerais para os tricordes são: 1) a classe de soma de uma classe de conjuntos somada ou diminuída de 1 é igual à classe de soma da segunda classe de conjuntos e a latitude é a mesma; 2) idem, mas com a latitude da segunda classe separada por mais ou menos 1, ou seja, é adjacente; 3) a classe de soma das classes de conjuntos somada ou diminuída de 2 é igual à classe de soma do segundo elemento e as latitudes são adjacentes; e 4) as classes de somas são iguais e as latitudes são adjacentes. Seguindo-se essas operações, mesmo sem saber quais classes de conjuntos estão envolvidas, pode-se determinar se estão encadeadas ou não.

- | | | | |
|----|-----------------|---|-------------------|
| 1) | $S1 \pm 1 = S2$ | e | $La1 = La2$ |
| 2) | $S1 \pm 1 = S2$ | e | $La1 \pm 1 = La2$ |
| 3) | $S1 \pm 2 = S2$ | e | $La1 \pm 1 = La2$ |
| 4) | $S1 = S2$ | e | $La1 \pm 1 = La2$ |

No caso da terceira operação acima descrita, observe-se que aparentemente há a soma de dois semitons. Isso decorre do fato de que algumas operações, ainda que somando-se ou subtraindo-se apenas um semitom, encadeiam-se com formas primas em que aparentemente dois elementos distanciam-se por um semitom. Reproduz-se aqui um exemplo enviado por Joseph Straus em e-mail privado, no qual ele explica essa suposta discrepância:

when you move from, say, A-B-D# to G#-B-D#, one note moves by semitone while the others are held in common. That is exactly the same amount of motion, and the same sort of motion, when A-B-D# moves to A-C-D#. In the first case, we would say that a member of sc(026) has moved smoothly to a member of (037), while in the second case a member of (026) moves to a member of (036). The prime forms create the illusion that there is more work involved in the first case (a second operation, as

you say), but that is false. Both of these moves are equally smooth moves (Straus, 2012).⁵¹

A versão anterior do espaço provia equações para tetra e pentacordes, mas necessitaria de um padrão de cores para diferenciar as conexões e decidiu-se simplificar o processo abandonando-se essa metodologia.

Uma última convenção a ser utilizada nesta tese refere-se à apresentação de conjuntos de classes de notas, formas normais e formas primas. Conjuntos de classes de notas serão escritos com os números que correspondem às classes de notas separados por vírgulas, assim: (5,3,7,9) é um conjunto qualquer de classes de notas. Formas normais serão escritas entre colchetes e com os números separados por vírgulas e espaços, assim: [3, 5, 7, 9] é a forma normal do conjunto anteriormente citado. Formas primas serão escritas entre parênteses, mas sem vírgulas separando as classes de notas e precedidas do nome de Forte, assim: 4-21 (0246) é a forma prima daquele conjunto. Nos textos analíticos, remove-se o nome de Forte para facilitar a leitura. Reforça-se que formas primas pai de multiconjuntos serão escritas apenas com a forma prima entre parênteses, sem nome de Forte e seguida da multiplicidade dos elementos contidos no conjunto, assim: (0235)_{2,1,2,1} refere-se a um hexacorde em que o primeiro e o terceiro elementos estão repetidos, ou seja, é (002337).

Enfim, todos os cálculos para as operações foram feitos em planilha *Excel*, os cálculos para as formas primas foram feitos com o Processador de Classes de Notas (PCN) e os modelos gráficos construídos no *Inkscape* (v. 1.2.1 até 1.4), SVG 2.0. Os dados assim obtidos foram cotejados automaticamente pelo aplicativo Zarlino, desenvolvido por Marcos da Silva Sampaio conforme mencionado no Capítulo 1. Os dados são então copiados manualmente para o arquivo XML. A estrutura dos arquivos XML é comum para todas as cardinalidades e contém as marcações (*tags*) comentadas no Quadro 3 a seguir.

Quadro 3 – estrutura de marcação XML.

Marcação	Descrição
<pcsets>	- elemento raiz;
<set>	- elemento pai para cada classe de conjunto;

⁵¹ Quando você se move, digamos, de Lá-Si-Ré# para Sol#-Si-Ré#, uma nota se move por semitom enquanto as outras são mantidas em comum. Esta é exatamente a mesma quantidade de movimento e, o mesmo tipo de movimento, de quando Lá-Si-Ré# se move para Lá-Dó-Ré#. No primeiro caso, diríamos que um membro da cc(026) se moveu suavemente para um membro de (037), enquanto no segundo caso um membro de (026) se moveu para um membro de (036). As formas primas criam a ilusão de que há mais trabalho envolvido no primeiro caso (uma segunda operação, como você diz), mas isso é falso. Ambos os movimentos são movimentos igualmente suaves. [E-mail trocado com o Prof. Straus em 21 de janeiro de 2012. A abreviatura cc (classe de conjuntos) em português foi traduzida de sc (*set class*) em inglês. (N.T.)]

<pre> <name></name> <content></content> <elements> <element id="1"></element> <element id="2"></element> </elements> <sum></sum> <audio fname="aud/3_1.mp3"/> <info> <vector_ic></vector_ic> <vector_ind></vector_ind> <symmetry> <transp></transp> <invers></invers> <level_t> <level></level> </level_t> <level_i> <level></level> </level_i> <axes></axes> </symmetry> <not_hexachord> <complement></complement> <compl_vector_ic></compl_vector_ic> <compl_vector_ind></compl_vector_ind> </not_hexachord> <hexachords> <combinatoriality> <p_comb>0</p_comb> <r_comb>1</r_comb> <i_comb>1</i_comb> <ri_comb>0</ri_comb> </combinatoriality> <complement></complement> </hexachords> </info> <local></local> <multiset_connect> <connect> </pre>	<ul style="list-style-type: none"> - nome de Allen Forte da classe; - conteúdo de classes de notas da classe de conjunto de origem; - cada elemento do conteúdo em separado (tantos quantos houver na cardinalidade); - a classe de soma (a soma dos elementos da classe de conjuntos); - endereço do arquivo de áudio referente à classe de conjuntos; - elemento pai para informações gerais sobre a classe de conjuntos; - o vetor classe-intervalar; - o vetor de índices (inversões); - elemento pai para tipos de simetria; - índice de simetria transpositiva; - índice de simetria inversiva; - nível de simetria transpositiva; - o nível propriamente dito; - nível de simetria inversiva; - o nível propriamente dito; - eixos de inversão (se houver); - marcação de fechamento para simetria; - para cardinalidades diferentes de seis; - o complemento da classe de conjuntos; - o vetor classe-intervalar do complemento; - vetor de índices do complemento; - marcação de fechamento; - exclusiva para as classes de hexacordes; - índices de combinatorialidade; - original (ou prima); - retrógrada; - inversa; - retroinversa; - marcação de fechamento; - ou autocomplementar ou Z-relacionada; - marcação de fechamento; - marcação de fechamento; - código de localização espacial (espécie de <i>token</i>); - elemento pai para classes de multiconjuntos; - conexão (haverá tantas quantas forem necessárias);
--	--

<pre> <set_connect></set_connect> <multiplicity>,</multiplicity> <operation></operation> <remarks></remarks> <ic_sharing> <mvector_ic>-</mvector_ic> <common_ic> <amount></amount> <kind>:</kind> </common_ic> <has></has> <loses></loses> <gets></gets> <ends></ends> </ic_sharing> </connect> </multiset_connect> <connect> <connect> <set_connect></set_connect> <operation></operation> <remarks></remarks> <ic_sharing> <destination></destination> <sum_difference></sum_difference> <common_ic> </pre>	<ul style="list-style-type: none"> - a forma prima pai para a classe de multiconjuntos; - os compostos de multiplicidade separados por vírgulas; - a operação que efetua a conexão (haverá tantas quantas forem necessárias); - observações (serve para indicar, por exemplo, que a conexão é feita exclusivamente por operações duplas; - elemento pai para compartilhamento de classes de intervalos; - vetor classe-intervalar para multiconjuntos (antes do hífen a quantidade de intervalos 0); - classes de intervalos comuns; - a quantidade total de classes de intervalos comuns; - a quantidade e o tipo de classe de intervalos comuns (separadas por dois pontos e quando há mais de uma classe de intervalos em comum, são separadas por vírgulas); - marcação de fechamento; - a quantidade e o tipo das classes de intervalos que a classe de conjuntos de origem tem; - a quantidade e as classes de intervalos perdidas ao encadear-se; - a quantidade e as classes de intervalos recebidas ao encadear-se; - a quantidade e o tipo de classes de intervalos resultante depois do encadeamento; - marcação de fechamento; - marcação de fechamento; - marcação de fechamento; - depois de listar todas as conexões com as classes de multiconjuntos, passa-se para as conexões com as classes de conjuntos, basicamente a mesma estrutura, só não há entrada para multiplicidade e há inclusão de uma entrada para a localização e para a diferença de classes de soma; - o código de onde está localizada a classe de conjuntos encadeada; - a diferença entre as classes de somas;
--	---

<pre> <amount></amount> <kind></kind> </common_ic> <has></has> <loses></loses> <gets></gets> <ends></ends> </ic_sharing> </connect> <image fname="img/3_1.png"/> </set> </pcsets> </pre>	<ul style="list-style-type: none"> - endereço do arquivo gráfico referente ao subespaço de encadeamentos; - marcação de fechamento; - marcação de fechamento.
---	--

Fonte: dados do autor

A folha de estilo XSL é comum a todos os arquivos XML e, ainda que simples, organiza os dados de forma tabular com contagem de conexões e operações disponíveis calculadas automaticamente e requereu uma estrutura relativamente complexa de testes para endereçar todas as mensagens específicas para os diversos casos possíveis, especialmente para as classes de hexacordes que têm propriedades diferentes das demais. Tanto os arquivos XML quanto XSL são abertos e podem ser lidos por qualquer editor de texto.

CAPÍTULO 3: O ESPAÇO ATONAL EXPANDIDO.

O espaço atonal expandido de encadeamentos é entendido aqui como o espaço atonal de encadeamentos tradicional ao qual se acrescenta uma nova classe de operações. Ele contém as operações tradicionais simples (+1 ou -1) acrescidas de uma nova operação dupla (+1 e -1). Algumas operações, tanto simples quanto duplas, resultam em multiconjuntos (*multisets*) que foram adicionados nessa versão do espaço (a versão prévia não considerava esses resultados que aumentam significativamente a quantidade de conexões). As operações duplas provêm conexões com classes de conjuntos diferentes daquelas proporcionadas pelas operações simples, porém, também conectam algumas classes de conjuntos que já estavam conectadas por operações simples; assim, pode-se chegar ao mesmo lugar por vias diferentes em alguns casos. As operações duplas não fazem parte da literatura de referência e, portanto, estão aqui apenas para ampliar as possibilidades de encadeamentos. Para manter-se no espaço tradicional, basta desconsiderar as conexões indicadas pelas convenções de notação especificadas mais adiante.

Uma visão panorâmica do espaço atonal expandido de encadeamentos revela os seguintes dados gerais: doze tricordes, vinte e nove tetracordes, trinta e oito pentacordes e cinquenta hexacordes perfazendo cento e vinte e nove classes de conjuntos. A Tabela 3 a seguir detalha as quantidades de operações simples e duplas possíveis com suas respectivas quantidades de encadeamentos tanto com classes de conjuntos quanto com classes de multiconjuntos.

Tabela 3 – quantidades de encadeamentos por cardinalidade.

Qt. classes de conjuntos e Qt. encadeamentos	Qt. operações	Qt. encadeamentos	Encadeamentos com classes de conjuntos	Encadeamentos com classes de multiconjuntos
Tricordes:	6 simples	72	60	12
12 com 144	6 duplas	72	55	17
Tetracordes:	8 simples	232	170	62
29 com 580	12 duplas	348	215	133
Pentacordes:	10 simples	380	244	136
38 com 1.140	20 duplas	760	365	395
Hexacordes:	12 simples	600	330	270
50 com 2.100	30 duplas	1.500	560	940
Totais	104	3.964	1.999	1.965
O espaço todo:	36 simples	1.284	804	480
129 com 3.964	68 duplas	2.680	1.195	1.485

Fonte: dados do autor

Observe-se que há totais muito aproximados de encadeamentos com classes de conjuntos e encadeamentos com classes de multiconjuntos, respectivamente, 1.999 (50,4%) e 1.965 (49,6%). Entretanto, as operações simples efetuam conexões com menos classes de multiconjuntos do que com classes de conjuntos, contrabalançadas pelas operações duplas que

efetuem conexões com mais classes de multiconjuntos do que com classes de conjuntos. Também, a quantidade de operações duplas é maior do que a de operações simples.

Os dados obtidos através dos cálculos (ver o capítulo anterior) são apresentados ao usuário em dois suportes diferentes e complementares: uma espécie de “carta de navegação” e uma “enciclopédia” (ou dicionário). A carta é uma modelagem gráfica plana contendo a localização das classes de conjuntos ligadas por conectores diferenciados para tipos diferentes de encadeamento, com os encadeamentos com multiconjuntos efetuados por operações simples e duplas representados por códigos. A enciclopédia contém informações sobre propriedades das classes de conjuntos, dos encadeamentos possíveis através de operações simples e duplas, intervalos comuns, intervalos perdidos e ganhos em cada operação e um recorte (subespaço) da carta para a classe de notas em foco com suas conexões.

Na elaboração da carta de navegação, algumas convenções foram adotadas, a saber:

1. A ordenação é sempre crescente de baixo para cima e da esquerda para a direita;
2. Círculos vazados circundam: a classe de conjuntos no centro com seu nome de Forte acima e sua classe de somas abaixo;
3. Três tipos de conectores (linhas) indicam conexões via operações simples sendo que a linha reta indica operação com o último elemento da forma prima, a linha pontilhada com o penúltimo elemento e a tracejada intercalada com pontos indica a operação com o primeiro elemento, isso para tricordes, pois nas demais cardinalidades, com raras exceções, essa operação muda o conjunto de aglomerado e não aparece indicada graficamente;
4. A linha tracejada curva indica uma operação dupla considerada especial: ela conecta classes de conjuntos que têm o mesmo número de classe de somas e são adjacentes;
5. Há somente duas classes de pentacordes: 5-32 (01469) e 5-22 (01478) em que esse tipo de conector exclusivo de operações duplas também é compartilhado por operações simples, e nesse caso, o conector está indicado em vermelho;
6. Pequenas setas na mesma direção dos conectores indicam que, além das operações simples, há pelo menos uma operação dupla que faz a mesma conexão;
7. Um pequeno disco preto indica que há ao menos uma operação dupla que mapeia o conjunto nele mesmo;
8. Um traço preto sobre a forma prima indica que há pelo menos uma operação simples que mapeia o conjunto nele mesmo;

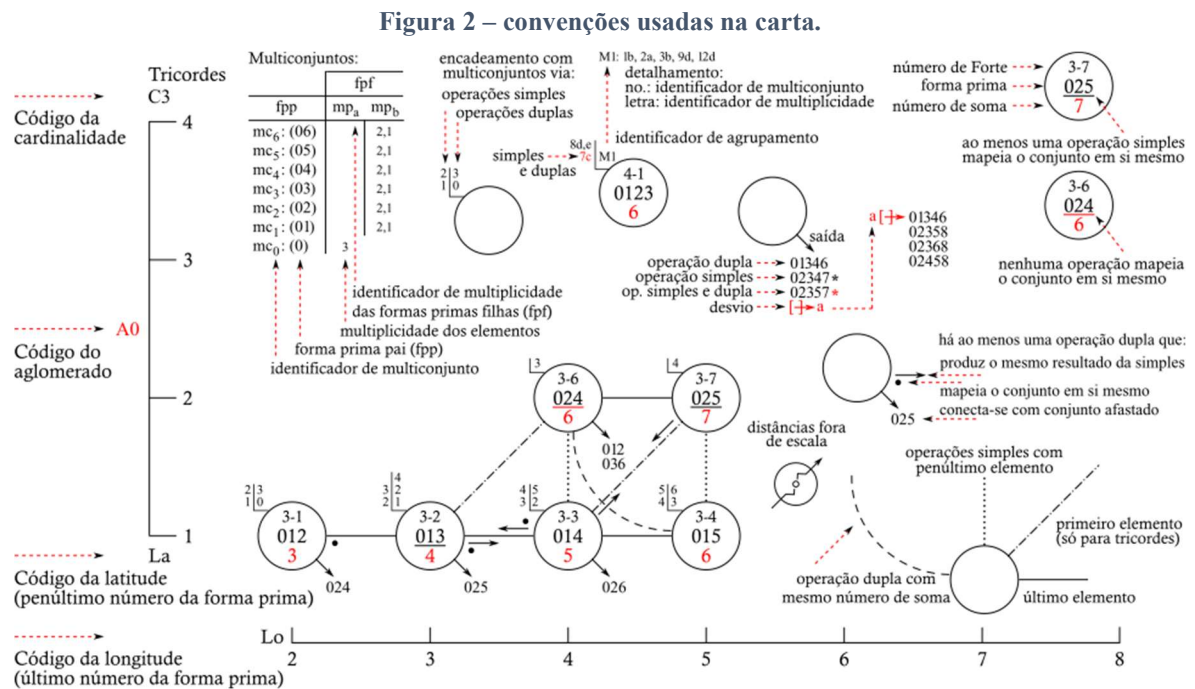
9. Um traço vermelho sobre a forma prima indica que nenhuma operação mapeia o conjunto nele mesmo;
10. Setas de saída, inseridas nos quadrantes inferiores direitos dos círculos que circundam as classes de conjuntos, indicam que a conexão está distante dentro do aglomerado (em outra latitude ou longitude não adjacente), ou está em outro aglomerado;
11. Uma seta com haste em forma de "z" e com um pequeno círculo no centro indica que a distância está fora de escala, ou seja, a distância entre os aglomerados foi reduzida para mostrar o local da classe de conjuntos que está em outro aglomerado;
12. Quando não há espaço suficiente (principalmente em classes de conjuntos que estão no centro dos aglomerados) para inserir todas as conexões na seta de saída, há uma indicação de desvio, identificado por uma letra minúscula seguida de uma seta saindo de dentro de colchetes que remetem à mesma letra em local com espaço para incluir as demais conexões;
13. Nas setas de saída e desvios, a forma prima conectada está escrita sem parênteses para economizar espaço; a forma prima sozinha é obtida por uma ou mais operações duplas, se houver um asterisco ela é obtida por uma ou mais operações simples, e um asterisco de cor vermelha indica que, tanto uma ou mais operações duplas quanto uma ou mais operações simples resultam ambas naquela forma prima;
14. Sempre que uma operação, seja simples ou dupla, resultar em uma conexão com alguma classe de conjuntos, haverá nesta classe uma operação que a conectará de volta com a anterior.

Quanto aos multiconjuntos (abreviados por mc) as convenções são:

1. Os multiconjuntos resultantes das operações estão dispostos em ordem crescente em uma tabela (colocada no lado esquerdo do gráfico) contendo a forma prima pai (fpp) e a multiplicidade de suas formas primas filhas (fpf);
2. As formas primas pais são identificadas por mc e um número sequencial identificador subscrito; a multiplicidade das formas primas filhas são indicadas por mp e letras minúsculas subscritas;
3. A multiplicidade é uma sequência de números subscritos e separados por vírgulas que indicam a quantidade de cada elemento da forma prima pai, por exemplo, mc₃ com multiplicidade 2,1 é escrito como: (03)_{2,1}, significando que há dois zeros e um três, ou seja, é o multiconjunto (003);

4. No quadrante superior esquerdo dos círculos, um traço em forma de L separa os números dos identificadores de multiconjuntos obtidos por operações simples e, à direita, os números dos identificadores de multiconjuntos obtidos por operações duplas;
5. Quando as operações resultam em muitos multiconjuntos a serem inseridos, um M maiúsculo seguido de um identificador numérico sequencial remete aos multiconjuntos escritos em uma linha de texto contendo os identificadores de formas primas pais e suas multiplicidades, por exemplo: M1: 1a, 1b, 2b etc. representam respectivamente a primeira forma prima pai com o primeiro tipo de multiplicidade, depois a mesma forma prima, mas com o segundo tipo de multiplicidade e a segunda forma prima pai com o segundo tipo de multiplicidade e assim por diante;
6. Em geral os multiconjuntos resultantes de operações simples são diferentes dos obtidos por operações duplas, entretanto, há alguns casos em que há pelo menos uma operação simples que compartilha o mesmo multiconjunto, com a mesma multiplicidade, com pelo menos uma operação dupla; os indicadores de multiconjuntos que têm essa propriedade estão escritos em vermelho no lado direito e se os dois lados estiverem escritos por extenso, em ambos os multiconjuntos estarão em vermelho (não há nenhum caso nos tetracordes).

Um resumo compacto das convenções está mostrado na Figura 2 a seguir.



Fonte: dados do autor

Observe-se que nem todas as multiplicidades possíveis são obtidas pelas operações, sendo que aquelas efetuadas com tricordes só produzem sete formas primas pais que geram formas primas filhas com dois compostos de multiplicidades; as operações com tetracordes produzem dezoito formas primas pais com cinco compostos de multiplicidades; as operações com os pentacordes produzem quarenta e uma formas primas pais com dez compostos de multiplicidades e as operações com os hexacordes produzem sessenta e nove formas primas pais com quinze compostos de multiplicidades. As tabelas detalhando as formas primas, as filhas e suas multiplicidades resultantes estão inseridas no início de cada subcapítulo.

Importante observar que assim como as classes de conjuntos são representadas por suas formas primas, entendendo-se a forma prima como sendo aquela dentre todas as transposições e inversões que são membros da classe e que começa com zero e é mais compacta à esquerda, assim também acontece com os multiconjuntos. A forma prima do multiconjunto (022) por exemplo é (002), que é a forma prima da inversão. As operações são efetuadas sempre sobre as formas primas e seus resultados nem sempre estarão em forma prima, mas estes serão sempre convertidos para a forma prima tanto na carta quanto na enciclopédia.

A par do modelo gráfico, há uma enciclopédia, composta de uma série de páginas HTML com informações sobre as classes de conjuntos, os encadeamentos e as classes de intervalos envolvidas. A metodologia para sua elaboração segue os seguintes passos: 1) copia-se cada linha da planilha que está em forma prima para uma outra planilha provisória usada para classificar em ordem ascendente as classes de conjuntos e de multiconjuntos; transfere-se as classes para o documento XML respectivo que contém assim todos os encadeamentos para cada classe de conjuntos de referência já com a estrutura organizada; 3) em outra planilha calcula-se automaticamente as trocas de classes de intervalos entre as classes encadeadas e transporta-se os resultados para o documento XML.

Cada página, uma para cada cardinalidade, está dividida em campos de tabelas. O primeiro apresenta informações gerais sobre o conjunto que está sendo referenciado e seu complemento (vetores classe-intervalar, vetores de índice, simetria transpositiva e inversiva etc.), além de informações sobre a quantidade de operações com classes de notas e com classes de multiconjuntos (há contadores na folha XSL que efetuam a contagem automaticamente, o que ajuda a verificar se tudo foi inserido corretamente). O segundo contém as operações com as conexões resultantes. O terceiro lista a quantidade de intervalos comuns, perdidos e recebidos em cada conexão. O quarto apresenta um gráfico mostrando a localização das classes de

conjuntos em forma prima e das conexões no espaço e um sexto campo contém um áudio que permite ouvir as classes de notas das classes de conjuntos ou de multiconjuntos em foco.

A localização das classes de conjuntos segue um padrão uniforme. A localização é dada por um código composto de 4 itens: a Cardinalidade (C), o Aglomerado (A) que varia para cada cardinalidade sendo 0 (zero) para tricordes, 0 e mais um número para tetracordes, 0 e mais dois números para pentacordes e 0 mais três números para hexacordes (em suma, o aglomerado agrupa classes de conjuntos que começam com os mesmos números), pela linha de latitude (La) que é sempre o número do penúltimo elemento da classe de conjuntos e pela coluna de longitude (Lo), que é sempre o número do último elemento da classe de conjuntos. Um exemplo já foi dado no capítulo anterior.

Ao consultar (dir-se-ia melhor, estudar) as páginas da enciclopédia que estão separadas por cardinalidade, observe-se ainda as seguintes convenções adotadas:

1. E1+: operação simples em que o primeiro elemento de uma classe de conjuntos é acrescido de um semitom. Operações simples são representadas por linhas sólidas no modelo gráfico do espaço;
2. E1+|E2-: operação dupla em que o primeiro elemento é acrescido e o segundo decrescido de um semitom. Atenção: algumas operações duplas podem mudar inteiramente o conteúdo classe-intervalar e, portanto, são encadeamentos para regiões mais afastadas. Operações duplas são representadas por linhas tracejadas no modelo gráfico;
3. As quantidades de classes de intervalos em comum, perdidas ou ganhas, são representadas por um número indicando a quantidade de intervalos, seguido por dois pontos e outro número indicando a classe de intervalos, por exemplo: 3:2 significa três segundas maiores; 2:6 significa dois trítomos e assim por diante. As classes de intervalos são: 0 para primeiras justas (uníssonos), 1 para segundas menores (ou sétimas maiores), 2 para segundas maiores (ou sétimas menores), 3 para terças menores (ou sextas maiores), 4 para terças maiores (ou sextas menores), 5 para quartas justas (ou quintas justas) e 6 para os trítomos (quarta aumentada ou quinta diminuta);
4. Primeiras justas (uníssonos) só são encontradas em multiconjuntos, obviamente;
5. As formas primas dos multiconjuntos estão dadas por sua forma originária (ou forma prima pai) entre parênteses, com as classes de notas separadas por vírgulas e seguida dos indicadores de multiplicidade em subscrito para evitar confusão, pois a forma prima (0,1) pode representar tanto (001) quanto (011), (0001), (0011) etc.; (0,1,2) pode representar

- (0012), (0112) ou (0122) e mesmo (00012), (00112) etc. Com os indicadores de multiplicidade, as repetições ficam absolutamente qualificadas, por exemplo: $(0,1)_{2,1}$ refere-se ao multiconjunto (001); $(0,1)_{2,2}$ refere-se à (0011). Aos multiconjuntos não se aplicam números de soma. Multiconjuntos não serão identificados pelo nome de (Allen) Forte (embora as formas primas pais possam ser identificadas por eles);
6. Tetracordes, pentacordes e hexacordes estão dispostos em ordem crescente e não seguem a ordem do número de Forte (os tricordes seguem a ordem crescente em paralelo com os nomes de Forte, o mesmo não acontece com outras cardinalidades);
 7. A quantidade de intervalos perdidos ou ganhos depende da direção. As direções por padrão partem sempre da forma prima do conjunto de referência para as demais. Para reverter a direção deve-se reverter as quantidades: as perdidas tornam-se ganhas e as ganhas tornam-se perdidas;
 8. Os arquivos de áudio tocam em sequência: intervalos melódicos dos elementos em ordem crescente um a um; intervalos harmônicos entre o primeiro e o segundo, o primeiro e o terceiro e assim por diante e, finalmente, todos os elementos juntos em arpejo.

Na enciclopédia, todas as informações estão codificadas em formato XML e apresentadas com folha de estilo XSL. Nem todos os navegadores têm suporte para XML com XSL. No navegador Edge da Microsoft é necessário abrir as configurações e aplicar a opção "recarregar o módulo Internet Explorer".

Devido à grande quantidade de dados que compõem o espaço, para evitar duplicação de informações e diminuir a extensão deste documento, direciona-se o leitor para a carta geral do espaço atonal expandido de encadeamentos e para a página principal da enciclopédia (a partir da qual se pode acessar todas as outras); estão em: <https://musica.ufma.br/bordini/eavls/>. As planilhas contendo os cálculos para as operações e suas conversões para as respectivas formas primas também estão lá.

O ESPAÇO DE TRICORDES

O espaço atonal expandido de encadeamentos para tricordes contém as seguintes características gerais: doze classes de conjuntos com as quais é possível efetuar seis operações simples e seis duplas, resultando em setenta e dois encadeamentos através de operações simples e setenta e dois também através de operações duplas totalizando cento e quarenta encadeamentos. As operações simples proveem sessenta encadeamentos com classes de

conjuntos e doze com classes de multiconjuntos, ao passo que as duplas resultam em cinquenta e cinco com classes de conjuntos e dezessete com classes de multiconjuntos.

As Tabelas 4 e 5 a seguir resumem os dados sobre as quantidades de encadeamentos respectivamente para operações simples e duplas. Nota-se que as operações simples E1- e E3+ não resultam em conexões com multiconjuntos. Isto também acontece com a operação dupla E1-|E3+ (a junção das duas simples). Ainda que a diferença seja pequena, as operações simples resultam em menos multiconjuntos do que as duplas.

Tabela 4 – quantidade de encadeamentos com operações simples (tricordes).

Operação	Encadeamentos com classes de	
	conjuntos	multiconjuntos
E1+	7	5
E1-	12	0
E2+	11	1
E2-	7	5
E3+	12	0
E3-	11	1
Totais	60	12

Fonte: dados do autor

Tabela 5 – quantidade de encadeamentos com operações duplas (tricordes).

Operação	Encadeamentos com classes de	
	conjuntos	multiconjuntos
E1+ E2-	8	4
E1- E2+	11	1
E1+ E3-	7	5
E1- E3+	12	0
E2+ E3-	10	2
E2- E3+	7	5
Totais	55	17

Fonte: dados do autor

As formas primas pais e suas filhas e respectivas multiplicidades estão elencadas na Tabela 6 a seguir que mostra também a quantidade de encadeamentos efetuados por operações simples e duplas. Há apenas sete formas primas pais com dois compostos de multiplicidade. A rigor, os multiconjuntos resultantes das operações: E2+, E3-, E1-|E2+ e os dois de E2+|E3- são respectivamente (022), (011), (033) e, (022) e (033), mas como mencionado no capítulo 2, as suas formas primas são as das inversões: (002), (001) e (003). Além disso o multiconjunto (0)₃ (000) só pode ser obtido por operação dupla.

Tabela 6 – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (tricordes).

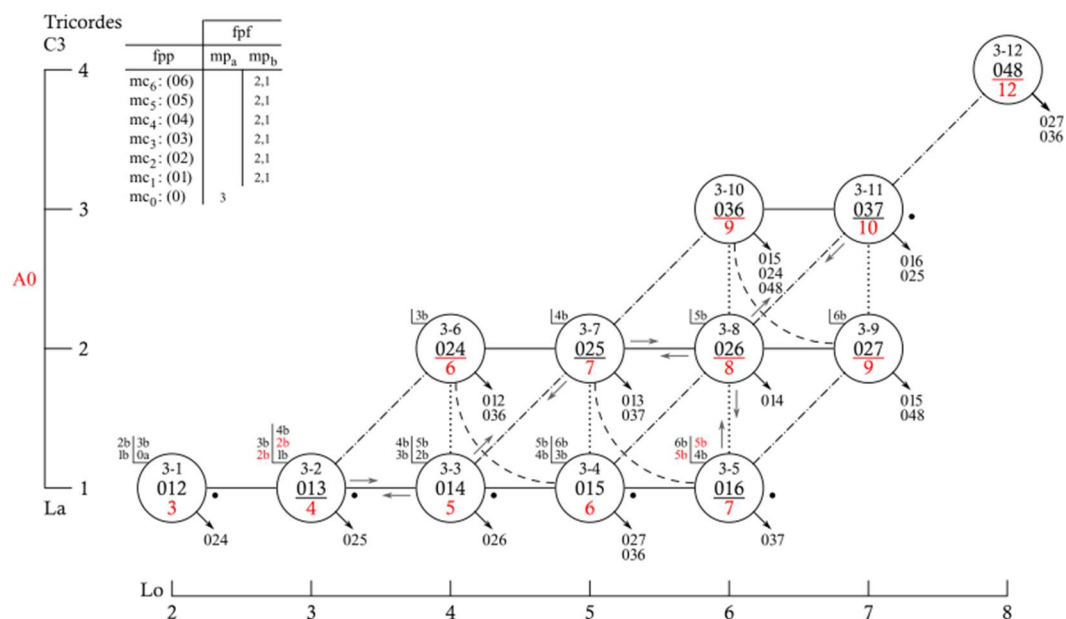
fpp	fpf		Operações	
	mp _a	mp _b	simples	duplas
(0)	3		0	1
(01)		2,1	2	1
(02)		2,1	3	2
(03)		2,1	2	5
(04)		2,1	2	3
(05)		2,1	2	3
(06)		2,1	1	2
Totais	1	6	12	17

Fonte: dados do autor

A Figura 3 a seguir mostra a carta para tricordes; a enciclopédia pode ser acessada *online* em: <https://musica.ufma.br/bordini/eavls/>. Alguns aspectos são bem aparentes: 1) conforme a latitude aumenta (classes de conjuntos com números maiores), diminuem as conexões com multiconjuntos; 2) há muitas operações redundantes, quer dizer, operações duplas que efetuam as mesmas conexões que as simples; 3) há operações simples e duplas que resultam na mesma classe de multiconjuntos (indicadas em vermelho); e 4) há classes de conjuntos que não são mapeadas em si mesmas por nenhuma operação (traços vermelhos).

Essas observações permitem sugerir que se pode aplicar uma operação simples e simultaneamente aplicar a dupla que efetua a mesma conexão permitindo que, com notas diferentes, o resultado permaneça na mesma classe de conjuntos ou multiconjuntos.

Figura 3 – carta de navegação para tricordes.



Fonte: dados do autor

O ESPAÇO DE TETRACORDES

O espaço atonal expandido de encadeamentos para tetracordes contém as seguintes características gerais: vinte e nove classes de conjuntos com as quais é possível efetuar oito operações simples e doze duplas, resultando em duzentos e trinta e dois encadeamentos através de operações simples e trezentos e quarenta e oito através de operações duplas totalizando quinhentos e oitenta encadeamentos. As operações simples proveem cento e setenta encadeamentos com classes de conjuntos e sessenta e duas com classes de multiconjuntos, ao passo que as duplas resultam em duzentas e quinze com classes de conjuntos e cento e trinta e três com classes de multiconjuntos.

As Tabelas 7 e 8 a seguir resumem aqueles dados respectivamente para operações simples e duplas. Nota-se que as operações simples E1- e E4+ não resultam em multiconjuntos. De modo semelhante ao que acontece com o espaço para tricordes, dá-se o mesmo com a operação dupla E1-|E4+ (a junção das duas simples).

Tabela 7 – quantidade de encadeamentos com operações simples (tetracordes).

Operação	Encadeamentos com classes de	
	conjuntos	multiconjuntos
E1+	12	17
E1-	29	0
E2+	20	9
E2-	12	17
E3+	24	5
E3-	20	9
E4+	29	0
E4-	24	5
Totais	170	62

Fonte: dados do autor

Tabela 8 – quantidade de encadeamentos com operações duplas (tetracordes).

Operação	Encadeamentos com classes de	
	conjuntos	multiconjuntos
E1+ E2-	20	9
E1- E2+	20	9
E1+ E3-	8	21
E1- E3+	24	5
E1+ E4-	12	17
E1- E4+	29	0
E2+ E3-	21	8
E2- E3+	12	17
E2+ E4-	16	13
E2- E4+	12	17

E3+ E4-	21	8
E3- E4+	20	9
Totais	215	133

Fonte: dados do autor

As formas primas pais e suas filhas com as respectivas multiplicidades estão elencadas na Tabela 9 a seguir que mostra também a quantidade de encadeamentos efetuados por operações simples e duplas. As formas primas pais de (01) até (06) só podem ser obtidas com operações duplas. As somas entre parênteses referem-se às quantidades para cada multiplicidade. O multiconjunto (0011) só pode ser obtido por uma única operação dupla: E1+|E4-. As multiplicidades 3,1 e 2,2 não são obtidas por operações simples.

Tabela 9 – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (tetracordes).

fpp	fpf					Operações	
	mp _a	mp _b	mp _c	mp _d	mp _e	simples	duplas
(01)		2,2				0	1
(02)	3,1	2,2				0	3 (2+1)
(03)	3,1	2,2				0	3 (1+2)
(04)	3,1	2,2				0	3 (1+2)
(05)	3,1	2,2				0	4 (1+3)
(06)	3,1	2,2				0	2 (1+1)
(012)			2,1,1			2	1
(013)			2,1,1	1,2,1	1,1,2	7 (1+2+4)	6 (3+1+2)
(014)			2,1,1	1,2,1	1,1,2	6 (1+1+4)	9 (2+4+3)
(015)			2,1,1	1,2,1	1,1,2	6 (1+1+4)	8 (3+2+3)
(016)			2,1,1	1,2,1	1,1,2	9 (2+1+6)	7 (2+2+3)
(024)			2,1,1	1,2,1		3 (2+1)	9 (7+2)
(025)			2,1,1	1,2,1	1,1,2	7 (2+3+2)	16 (4+4+8)
(026)			2,1,1	1,2,1	1,1,2	6 (2+2+2)	22 (4+7+11)
(027)			2,1,1	1,2,1	1,1,2	4 (2+1+1)	9 (2+2+5)
(036)			2,1,1	1,2,1		3 (2+1)	8 (5+3)
(037)			2,1,1	1,2,1	1,1,2	8 (2+3+3)	19 (9+5+5)
(048)			2,1,1	1,2,1		1 (1+0)	3 (2+1)
Totais	5	6	12	11	8	62	133

Fonte: dados do autor

As Figuras 4a, 4b e 4c a seguir referem-se à carta para tetracordes (separada em seus três aglomerados para melhorar sua visualização nesta página) e a enciclopédia pode ser acessada *online* em: <https://musica.ufma.br/bordini/eavls/>. Algumas particularidades são bem aparentes: 1) há três aglomerados: A01 com dezessete classes de conjuntos, A02 com nove e A03 com três; 2) assim como acontece com os tricordes, conforme a latitude aumenta (classes de conjuntos com números maiores), diminuem as conexões com multiconjuntos; 3) há muitas operações redundantes, quer dizer, operações duplas que efetuam as mesmas conexões que as

simples; 4) diferentemente do que acontece com os tricordes, não há operações simples e duplas que resultam na mesma classe de multiconjuntos; 5) as classes de conjuntos que não são mapeadas em si mesmas por nenhuma operação (traços vermelhos) só acontecem no segundo aglomerado; 6) os traços diagonais tracejados presentes na carta para tricordes não são encontrados aqui (exceto por operações duplas em alguns casos), pois as operações que os provocam dirigem-se para outros aglomerados (setas no quadrante inferior direito dos círculos); 7) há um aumento significativo de multiconjuntos obtidos por operações duplas; 8) não há classes iniciando com (04...); e 9) a classe de conjuntos 4-28 (0369) é a única que não se encadeia com multiconjuntos.

Figura 4a – carta de navegação para tetracordes (A01).

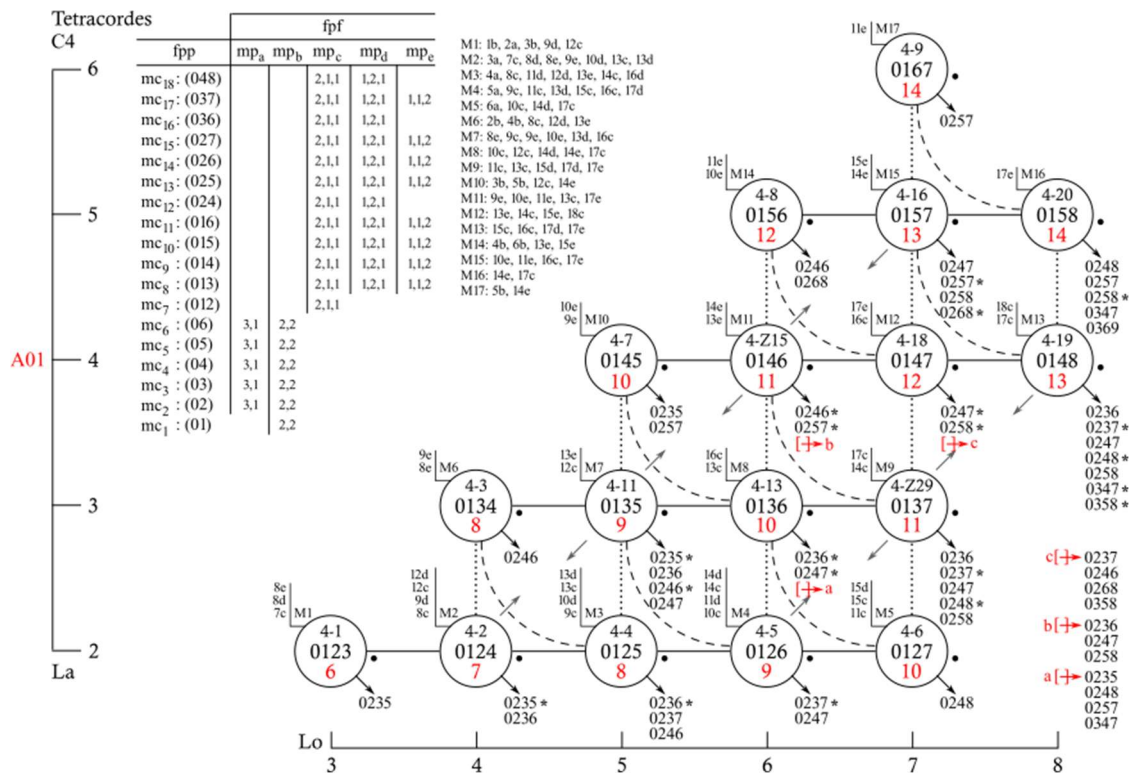
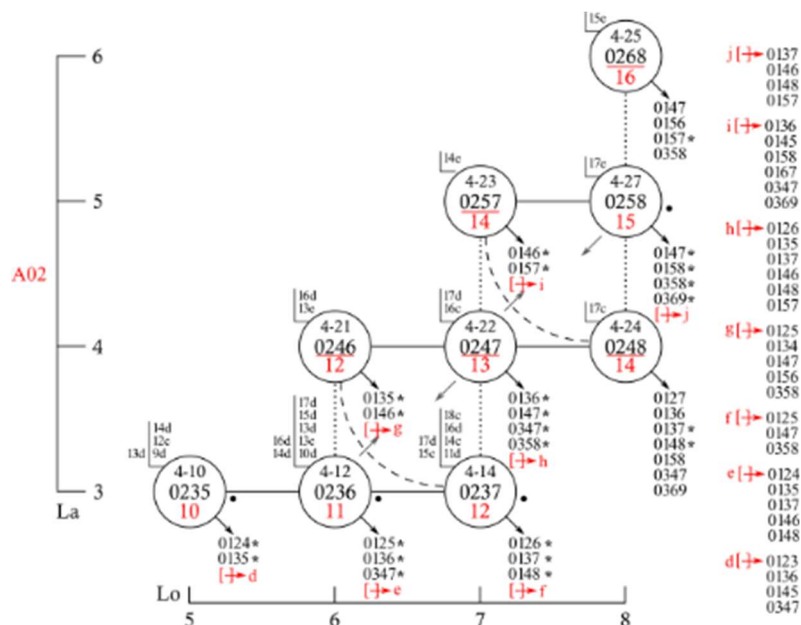
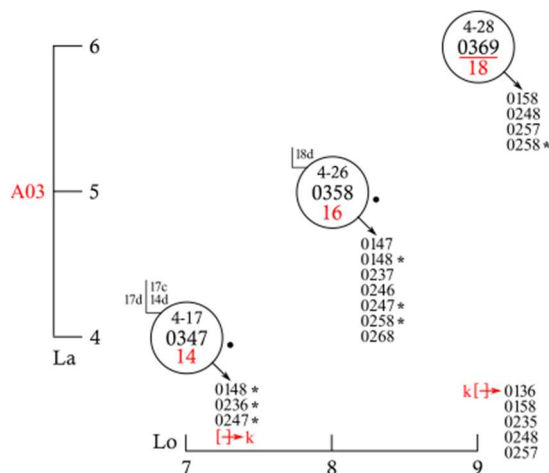


Figura 5b – carta de navegação para tetracordes (A02).



Fonte: dados do autor

Figura 6c – carta de navegação para tetracordes (A03)



Fonte: dados do autor

O ESPAÇO DE PENTACORDES

O espaço atonal expandido de encadeamentos para pentacordes contém as seguintes características gerais: trinta e oito classes de conjuntos com as quais é possível efetuar dez operações simples e vinte duplas, resultando em trezentos e oitenta encadeamentos através operações simples e setecentos e sessenta através de operações duplas totalizando 1.140 encadeamentos. As operações simples proveem duzentos e quarenta e quatro encadeamentos com classes de conjuntos e cento e trinta e seis com classes de multiconjuntos, ao passo que as

duplas resultam em trezentos e sessenta e cinco com classes de conjuntos e trezentos e noventa e cinco com classes de multiconjuntos. Não se incluiu as figuras das cartas por serem muitas.

As Tabelas 10 e 11 a seguir resumem aqueles dados respectivamente para operações simples e duplas. Nota-se que as operações simples E1- e E5+ não resultam em multiconjuntos. De modo semelhante ao que acontece com o espaço para as outras cardinalidades, dá-se o mesmo com a operação dupla E1-|E5+ (a junção das duas simples).

Tabela 10 – quantidade de encadeamentos com operações simples (pentacordes).

Operação	Encadeamentos com classes de	
	conjuntos	multiconjuntos
E1+	10	28
E1-	38	0
E2+	19	19
E2-	10	28
E3+	24	14
E3-	19	19
E4+	31	7
E4-	24	14
E5+	38	0
E5-	31	7
Totais	244	136

Fonte: dados do autor

Tabela 11 – quantidade de encadeamentos com operações duplas (pentacordes).

Operação	Encadeamentos com classes de	
	conjuntos	multiconjuntos
E1+ E2-	29	9
E1- E2+	19	19
E1+ E3-	4	34
E1- E3+	24	14
E1+ E4-	6	32
E1- E4+	31	7
E1+ E5-	10	28
E1- E5+	38	0
E2+ E3-	25	13
E2- E3+	6	32
E2+ E4-	12	26
E2- E4+	10	28
E2+ E5-	16	22
E2- E5+	10	28
E3+ E4-	25	13
E3- E4+	16	22
E3+ E5-	18	20
E3- E5+	19	19
E4+ E5-	23	15

E4- E5+	24	14
Totais	365	395

Fonte: dados do autor

As formas primas pais e suas filhas com as respectivas multiplicidades estão elencadas nas Tabela 12a e 12b a seguir (separadas para melhor abrigarem os dados) que mostram também a quantidade de encadeamentos efetuados por operações simples e duplas. As formas primas pais de multiconjuntos com três elementos e de quatro elementos tem compostos de multiplicidades exclusivos. Não há formas primas pais de dois elementos (tampouco de um só). Nenhuma das multiplicidades de multiconjuntos com quatro elementos está presente em todas as formas primas pais. A forma prima pai (012) só apresenta a multiplicidade 2,1,2 e é obtida por apenas uma única operação: E1+|E5-. A forma prima pai (0123) só apresenta multiplicidade 2,1,1,1 (obtida através das operações E1+, E5- e E1+|E5-) e (0167) só apresenta multiplicidade 1,2,1,1 (obtida através de operações duplas) e é o único que não tem multiplicidade 2,1,1,1. Operações simples não se encadeiam com multiconjuntos de forma prima pai com três elementos. A forma prima pai que tem mais encadeamentos com multiconjuntos é (0258) com 40 encadeamentos.

Tabela 12a – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (pentacordes).

fpp	fpf						Operações	
	mp _a	mp _b	mp _c	mp _d	mp _e	mp _f	simples	duplas
(012)					2,1,2		0	1
(013)			1,1,3	2,2,1	2,1,2		0	5 (2+2+1)
(014)			1,1,3	2,2,1	2,1,2	1,2,2	0	5 (1+1+1+2)
(015)			1,1,3	2,2,1	2,1,2	1,2,2	0	4 (1+1+1+1)
(016)			1,1,3	2,2,1	2,1,2	1,2,2	0	4 (1+1+1+1)
(024)	3,1,1	1,3,1		2,2,1	2,1,2		0	5 (1+1+1+2)
(025)	3,1,1	1,3,1	1,1,3	2,2,1	2,1,2	1,2,2	0	8 (1+1+1+1+2+2)
(026)	3,1,1	1,3,1	1,1,3	2,2,1	2,1,2	1,2,2	0	8 (1+1+1+1+2+2)
(027)	3,1,1		1,1,3	2,2,1	2,1,2	1,2,2	0	5 (1+1+1+1+1)
(036)	3,1,1	1,3,1		2,2,1	2,1,2		0	6 (1+1+2+2)
(037)	3,1,1	1,3,1	1,1,3	2,2,1	2,1,2	1,2,2	0	9 (1+1+1+2+2+2)
(048)		1,3,1		2,2,1			0	3 (1+2)
Totais	6	6	8	11	11	7	0	63

Fonte: dados do autor

Tabela 12b – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (pentacordes).

fpp	fpf				Operações	
	mp _g	mp _h	mp _i	mp _j	simples	duplas
(0123)	2,1,1,1				2	1
(0124)	2,1,1,1		1,1,2,1	1,1,1,2	6 (1+2+3)	5 (2+1+2)
(0125)	2,1,1,1		1,1,2,1	1,1,1,2	4 (1+1+2)	9 (2+4+3)
(0126)	2,1,1,1		1,1,2,1	1,1,1,2	4 (1+1+2)	8 (2+2+4)

(0127)	2,1,1,1		1,1,1,2	2 (1+1)	4 (2+2)
(0134)	2,1,1,1	1,2,1,1		3 (1+2)	3 (2+1)
(0135)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2	7 (1+1+2+3) 14 (3+4+3+4)
(0136)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2	7 (1+1+2+3) 14 (3+2+4+5)
(0137)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2	6 (1+1+2+2) 15 (4+2+4+5)
(0145)	2,1,1,1	1,2,1,1		2 (1+1)	5 (3+2)
(0146)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2	6 (1+1+2+2) 16 (3+3+6+4)
(0147)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2	7 (2+1+2+2) 19 (5+3+6+5)
(0148)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2	9 (2+1+3+3) 16 (3+3+5+5)
(0156)	2,1,1,1	1,2,1,1		2 (1+1)	5 (3+2)
(0157)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2	7 (2+1+2+2) 16 (3+3+5+5)
(0158)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1		3 (0+1+2) 8 (3+0+5)
(0167)		1,2,1,1		1	2
(0235)	2,1,1,1	1,2,1,1		3 (2+1)	9 (7+2)
(0236)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2	7 (2+1+2+2) 15 (5+2+3+5)
(0237)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2	7 (4+1+1+1) 17 (4+2+5+6)
(0246)	2,1,1,1	1,2,1,1		5 (2+3)	11 (6+5)
(0247)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2	8 (3+2+2+1) 29 (6+7+6+10)
(0248)	2,1,1,1	1,2,1,1		1,1,1,2	4 (2+1+1) 13 (6+3+4)
(0257)	2,1,1,1	1,2,1,1		4 (2+2)	12 (6+6)
(0258)	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2	8 (2+2+2+2) 32 (6+8+9+9)
(0268)	2,1,1,1	1,2,1,1		3 (1+2)	6 (4+2)
(0347)	2,1,1,1	1,2,1,1		3 (2+1)	8 (5+3)
(0358)	2,1,1,1	1,2,1,1		5 (2+3)	16 (10+6)
(0369)	2,1,1,1	1,2,1,1		1 (1+0)	4 (2+2)
Totais	28	24	15	17	136
					332

Fonte: dados do autor

O ESPAÇO DE HEXACORDES

O espaço atonal expandido de encadeamentos para hexacordes contém as seguintes características gerais: cinquenta classes de conjuntos com as quais é possível efetuar doze operações simples e trinta duplas, resultando em seiscentos encadeamentos através operações simples e 1.500 através de operações duplas totalizando 2.100 encadeamentos. As operações simples proveem trezentos e trinta encadeamentos com classes de conjuntos e duzentos e setenta com classes de multiconjuntos, ao passo que as duplas resultam em quinhentos e sessenta com classes de conjuntos e novecentos e quarenta com classes de multiconjuntos.

As Tabelas 13 e 14 a seguir resumem aqueles dados respectivamente para operações simples e duplas. Nota-se que as operações simples E1- e E6+ não resultam em multiconjuntos. De modo semelhante ao que acontece com o espaço para as outras cardinalidades, dá-se quase o mesmo com a operação dupla E1-|E6+ (a junção das duas simples), pois aqui há uma exceção, há um único encadeamento com multiconjuntos (marcado em vermelho na Tabela 14), não à

toa envolvendo 6-35 (02468A), o último hexacorde da lista, a famosa coleção de tons inteiros que se encadeia com uma única classe de multiconjuntos (02469)_{2,1,1,1,1}.

Tabela 13 – quantidade de encadeamentos com operações simples (hexacordes).

Operação	Encadeamentos com classes de	
	conjuntos	multiconjuntos
E1+	9	41
E1-	50	0
E2+	18	32
E2-	9	41
E3+	24	26
E3-	18	32
E4+	28	22
E4-	24	26
E5+	36	14
E5-	28	22
E6+	50	0
E6-	36	14
Totais	330	270

Fonte: dados do autor

Tabela 14 – quantidade de encadeamentos com operações duplas (hexacordes).

Operação	Encadeamentos com classes de	
	conjuntos	multiconjuntos
E1+ E2-	41	9
E1- E2+	18	32
E1+ E3-	2	48
E1- E3+	24	26
E1+ E4-	4	46
E1- E4+	28	22
E1+ E5-	5	45
E1- E5+	36	14
E1+ E6-	9	41
E1- E6+	49	1
E2+ E3-	36	14
E2- E3+	4	46
E2+ E4-	7	43
E2- E4+	5	45
E2+ E5-	11	39
E2- E5+	9	41
E2+ E6-	14	36
E2- E6+	9	41
E3+ E4-	34	16
E3- E4+	11	39
E3+ E5-	11	39
E3- E5+	14	36
E3+ E6-	17	33

E3- E6+	18	32
E4+ E5-	31	19
E4- E5+	17	33
E4+ E6-	18	32
E4- E6+	24	26
E5+ E6-	26	24
E5- E6+	28	22
Totais	560	940

Fonte: dados do autor

As formas primas pais e suas filhas e respectivas multiplicidades estão elencadas nas Tabela 15a, 15b e 15c a seguir (separadas para melhor abrigarem os dados) que mostram também a quantidade de encadeamentos efetuados por operações simples e duplas. As formas primas pais de multiconjuntos com quatro elementos e de cinco elementos têm compostos de multiplicidades exclusivos. Não há formas primas pais de dois e três elementos (tampouco de um só). Nenhuma operação simples se encadeia com classes de multiconjuntos pais de quatro elementos. As formas primas pais (0123), (0134), (0145) e (0167) não se encadeiam com compostos de multiplicidade que contêm três repetições de um elemento. Somente (0247) e (0258) têm todos os compostos de multiplicidades com três repetições de um elemento (Tabela 15a) e dois elementos com uma repetição cada (Tabela 15b). Todas as formas primas pais com cinco elementos têm a multiplicidade 2,1,1,1,1. Destacados em cor vermelha na Tabela 15c respectivamente (de cima para baixo) estão: 1) a forma prima pai (01368) que tem a maior quantidade de encadeamentos através de operações duplas (quarenta); 2) a forma prima pai (01369) que tem a maior quantidade de encadeamentos através de operações simples (quatorze); 3) a forma prima filha (01458)_{1,1,1,1,2} que tem a maior quantidade de encadeamentos por operações simples (sete); e 4) a forma prima filha (02458)_{1,1,1,1,2} que tem a maior quantidade de encadeamentos por operações duplas (dezesseis) e a forma prima filha (02479)_{1,1,1,1,2} que não pode ser obtida por operações duplas.⁵²

Tabela 15a – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (hexacordes).

fpp	fpf				Operações	
	mp _a	mp _b	mp _c	mp _d	simples	duplas
(0123)					0	0
(0124)				1,1,1,3	0	2
(0125)				1,1,1,3	0	2
(0126)				1,1,1,3	0	2

⁵² A rigor, há encadeamentos com operações duplas que resultam em (024799), porém a forma prima “preferida” é (024779) para alguns casos, por exemplo: uma operação que resulte em [0, 0, 2, 5, 7, 9] terá como forma prima aquela da inversão que é (024799), mas como [0, 0, 2, 5, 7, 9] não está em forma normal que é [5, 7, 9, 0, 0, 2], terá então como forma prima aquela da transposição, que é: (024779).

(0127)			1,1,1,3	0	2	
(0134)				0	0	
(0135)		1,1,3,1	1,1,1,3	0	3 (2+1)	
(0136)		1,1,3,1	1,1,1,3	0	2 (1+1)	
(0137)		1,1,3,1	1,1,1,3	0	2 (1+1)	
(0145)				0	0	
(0146)		1,1,3,1	1,1,1,3	0	2 (1+1)	
(0147)		1,1,3,1	1,1,1,3	0	2 (1+1)	
(0148)		1,1,3,1	1,1,1,3	0	2 (1+1)	
(0156)				0	0	
(0157)		1,1,3,1	1,1,1,3	0	3 (1+2)	
(0158)		1,1,3,1		0	1	
(0167)				0	0	
(0235)	3,1,1,1			0	1	
(0236)	3,1,1,1		1,1,1,3	0	2 (1+1)	
(0237)	3,1,1,1		1,1,1,3	0	3 (2+1)	
(0246)	3,1,1,1	1,3,1,1		0	2 (1+1)	
(0247)	3,1,1,1	1,3,1,1	1,1,3,1	1,1,1,3	0	5 (1+1+2+1)
(0248)	3,1,1,1	1,3,1,1		1,1,1,3	0	3 (1+1+1)
(0257)	3,1,1,1	1,3,1,1			0	2 (1+1)
(0258)	3,1,1,1	1,3,1,1	1,1,3,1	1,1,1,3	0	5 (2+1+1+1)
(0268)		1,3,1,1			0	1
(0347)	3,1,1,1				0	1
(0358)	3,1,1,1	1,3,1,1			0	2 (1+1)
(0369)		1,3,1,1			0	1
Totais	10	8	10	16	0	53

Fonte: dados do autor

Tabela 15b – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (hexacordes).

fpp	fpf						Operações	
	mp _e	mp _r	mp _g	mp _h	mp _i	mp _j	simples	duplas
(0123)			2,1,1,2				0	1
(0124)		2,1,2,1	2,1,1,2				0	3 (2+1)
(0125)		2,1,2,1	2,1,1,2			1,1,2,2	0	4 (1+1+2)
(0126)		2,1,2,1	2,1,1,2			1,1,2,2	0	4 (1+2+1)
(0127)		2,1,2,1	2,1,1,2				0	2 (1+1)
(0134)	2,2,1,1		2,1,1,2				0	3 (2+1)
(0135)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2		1,2,1,2	1,1,2,2	0	7 (1+2+1+2+1)
(0136)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2		1,2,1,2	1,1,2,2	0	6 (1+1+1+1+2)
(0137)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2		1,2,1,2	1,1,2,2	0	9 (2+1+1+1+4)
(0145)	2,2,1,1		2,1,1,2	1,2,2,1			0	3 (1+1+1)
(0146)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1	1,2,1,2	1,1,2,2	0	9 (1+2+1+1+2+2)
(0147)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1	1,2,1,2	1,1,2,2	0	7 (1+1+1+1+1+2)
(0148)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1	1,2,1,2	1,1,2,2	0	8 (1+1+1+2+1+2)
(0156)	2,2,1,1		2,1,1,2	1,2,2,1			0	4 (1+2+1)
(0157)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1	1,2,1,2	1,1,2,2	0	10 (1+4+1+1+2+1)
(0158)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2			1,1,2,2	0	7 (1+1+1+4)
(0167)	2,2,1,1			1,2,2,1			0	2 (1+1)

(0235)	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1				0	4 (1+2+1)
(0236)	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1	1,2,1,2	1,1,2,2		0	6 (1+2+1+1+1)
(0237)	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1	1,2,1,2	1,1,2,2		0	7 (1+2+1+2+1)
(0246)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1			0	6 (1+2+2+1)
(0247)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1	1,2,1,2	1,1,2,2	0	10 (1+2+2+1+2+2)
(0248)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2		1,2,1,2		0	6 (1+2+2+1)
(0257)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1			0	7 (1+2+2+2)
(0258)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1	1,2,1,2	1,1,2,2	0	12 (1+3+2+2+2+2)
(0268)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1			0	5 (1+1+1+2)
(0347)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1			0	7 (1+1+4+1)
(0358)	2,2,1,1	2,1,2,1	2,1,1,2	1,2,2,1			0	8 (2+3+2+1)
(0369)	2,2,1,1	2,1,2,1		1,2,2,1			0	3 (1+1+1)
Totais	21	24	27	18	12	14	0	170

Fonte: dados do autor

Tabela 15c – quantidade de encadeamentos com multiconjuntos (hexacordes).

fpp	fpf					Operações	
	mp _k	mp _i	mp _m	mp _n	mp _o	simples	duplas
(01234)	2,1,1,1,1					2	1
(01235)	2,1,1,1,1			1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	6 (1+2+3)	5 (2+1+2)
(01236)	2,1,1,1,1			1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	4 (1+1+2)	11 (3+4+4)
(01237)	2,1,1,1,1			1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	6 (2+1+3)	7 (2+2+3)
(01245)	2,1,1,1,1		1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	7 (1+2+2+2)	7 (3+1+1+2)
(01246)	2,1,1,1,1		1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	8 (1+1+3+3)	14 (3+4+3+4)
(01247)	2,1,1,1,1		1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	6 (1+1+2+2)	21 (3+2+7+9)
(01248)	2,1,1,1,1		1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	8 (1+2+3+2)	16 (5+2+4+5)
(01256)	2,1,1,1,1		1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	6 (1+1+2+2)	8 (2+2+2+2)
(01257)	2,1,1,1,1		1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	8 (1+1+3+3)	17 (5+3+4+5)
(01258)	2,1,1,1,1		1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	7 (2+1+2+2)	26 (3+5+7+11)
(01267)	2,1,1,1,1		1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	9 (2+1+2+4)	8 (2+2+2+2)
(01268)	2,1,1,1,1			1,1,1,2,1		6 (1+5)	7 (3+4)
(01346)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	7 (1+1+1+1+3)	16 (3+4+2+3+4)
(01347)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	7 (1+1+1+1+3)	16 (3+2+3+3+5)
(01348)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1			1,1,1,1,2	4 (1+2+1)	9 (3+2+4)
(01356)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1			3 (1+1+1)	9 (5+2+2)
(01357)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	9 (1+1+2+2+3)	26 (4+3+5+8+6)
(01358)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	9 (1+1+2+2+3)	27 (4+5+5+6+7)
(01367)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	7 (1+1+3+1+1)	20 (3+2+4+3+8)
(01368)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	9 (1+1+2+2+3)	40 (7+3+10+13+7)
(01369)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	14 (2+2+3+4+3)	28 (4+3+6+7+8)
(01457)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	6 (1+1+1+1+2)	21 (3+5+5+2+6)
(01458)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	11 (1+1+1+1+7)	19 (5+3+3+3+5)
(01468)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	9 (2+1+2+2+2)	34 (4+4+6+5+15)
(01469)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	10 (1+1+2+3+3)	35 (4+6+11+7+7)
(01478)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1			3 (1+1+1)	12 (3+5+4)
(01568)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	8 (1+1+1+2+3)	18 (4+5+3+2+4)
(02346)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1				3 (2+1)	9 (7+2)
(02347)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1		1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	7 (2+1+2+2)	15 (4+3+3+5)

(02357)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	10 (2+1+2+3+2)	27 (6+3+3+5+10)
(02358)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	10 (2+1+1+3+3)	33 (11+3+5+6+8)
(02368)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	11 (3+1+1+3+3)	32 (6+5+4+6+11)
(02458)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	9 (3+2+1+1+2)	38 (6+7+3+6+16)
(02468)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1			5 (2+2+1)	21 (9+7+5)
(02469)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1			1,1,1,1,2	6 (2+3+1)	34 (13+7+14)
(02479)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1	1,1,2,1,1	1,1,1,2,1	1,1,1,1,2	7 (1+1+2+2+1)	22 (6+6+2+8+0)
(03458)	2,1,1,1,1	1,2,1,1,1				3 (2+1)	8 (5+3)
Totais	38	25	28	30	31	270	717

Fonte: dados do autor

Há muito a observar sobre padrões e proporções entre multiconjuntos e compostos de multiplicidades de diferentes cardinalidades, mas esse estudo está fora do escopo desta tese porquanto exigiria uma outra de porte talvez ainda maior. Passa-se ao detalhamento das operações simples e duplas para cada classe de conjuntos com seus 3.964 encadeamentos.

OS ENCADEAMENTOS

Para cada classe de conjuntos, lista-se a seguir os seguintes dados: nome de Forte precedendo a forma prima da classe de conjuntos, a classe de somas, o vetor classe-intervalar, o vetor de índices, os graus de simetria transpositiva e inversiva, os níveis de transposição e inversão, os eixos de simetria, o complemento, o vetor classe-intervalar do complemento, o vetor de índices do complemento, o código de localização, a quantidade de encadeamentos (conexões) com classes de conjuntos e com classes de multiconjuntos e o total de conexões. Para cada classe de conjuntos lista-se as operações que efetuam o encadeamento com classes de conjuntos e em seguida com classes de multiconjuntos. Sempre que os encadeamentos são efetuados unicamente por operações duplas, informa-se o fato. Em paralelo, informa-se o código de localização da classe conectada, a diferença entre as classes de somas, a quantidade de classes de intervalos em comum e a quantidade de cada classe de intervalos em comum, a quantidade inicial de classes de intervalos para cada classe de intervalos, a quantidade perdida com a operação, a quantidade obtida com a operação e finalmente a quantidade resultante da operação. No caso de hexacordes, informa-se ainda a combinatoriedade (prima, retrógrada, inversa e retroinversa) e se o complemento é autocomplementar. Completa-se o conjunto de dados com um recorte (subespaço) gráfico dos encadeamentos referentes à classe de conjuntos em foco (na versão *online* pode-se também ouvir os áudios correspondentes).

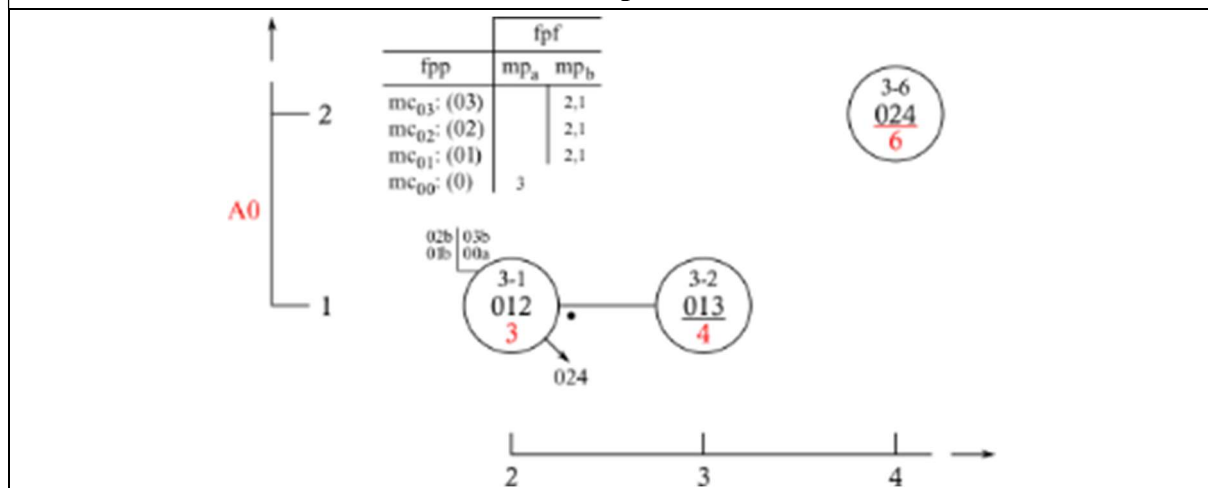
A inserção dos dados completos num suporte como este exigiria centenas de páginas. A título de exemplo, mostra-se aqui apenas a primeira classe de conjuntos de cada cardinalidade. O conjunto completo de dados está em: <https://musica.ufma.br/bordini/eavls/>.

Quadro 4 – dados para 3-1 (012).

3-1 (012)	
Propriedades	
Classe de conjuntos: 3-1(012) Classe de somas: 3 Vetor classe-intervalar: 210000 Vetor de índices: 123210000000 Graus de simetria (T_n, I_n): 1,1 Níveis de transposição: T_0 ; Níveis de inversão: I_2 ; Eixo(s) de simetria: 1-7 Complemento: 9-1 (012345678) Vetor classe-intervalar: 876663 Vetor de índices: 666666789876	Localização: C3A0La1Lo2 Quantidade de conexões: 3 com classes de conjuntos através de 5 operações; 4 com multiconjuntos através de 7 operações. Total de conexões: 7
Classes de conjuntos	
Operações	Intervalos
Conexão com: si mesmo Operações disponíveis: $E1+ E2-$ $E2+ E3-$ só com dupla operação	Conexões com si mesmo: – mesmas características!
Conexão com: 3-2 (013) Operações disponíveis: $E1-$ $E3+$	Conexão com 3-2 (013) implica: Movimento para C3A0La1Lo3 Diferença de classe de soma: +1 Classes de intervalos: 2 em comum: 1:1, 1:2 Tem: 2:1, 1:2 Perde: 1:1 Recebe: 1:3 Fica com: 1:1, 1:2, 1:3
Conexão com: 3-6 (024) Operações disponíveis: $E1- E3+$ só com dupla operação	Conexão com 3-6 (024) implica: Movimento para C3A0La2Lo4 Diferença de classe de soma: +3 Classes de intervalos: 1 em comum: 1:2 Tem: 2:1, 1:2 Perde: 2:1 Recebe: 1:2, 1:4 Fica com: 2:2, 1:4
Classes de multiconjuntos	
Operações	Intervalos
Conexão com: $(0)_3$ Operações disponíveis: $E1+ E3-$ só com dupla operação	Conexão com $(0)_3$ implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 3-000000 Classes de intervalos:

	0 em comum: Tem: 2:1, 1:2 Perde: 2:1, 1:2 Recebe: 3:0 Fica com: 3:0
Conexão com: $(01)_{2,1}$ Operações disponíveis: E1+ E3-	Conexão com $(01)_{2,1}$ implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-200000 Classes de intervalos: 2 em comum: 2:1 Tem: 2:1, 1:2 Perde: 1:2 Recebe: 1:0 Fica com: 1:0, 2:1
Conexão com: $(02)_{2,1}$ Operações disponíveis: E2+ E2-	Conexão com $(02)_{2,1}$ implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-020000 Classes de intervalos: 1 em comum: 1:2 Tem: 2:1, 1:2 Perde: 2:1 Recebe: 1:0, 1:2 Fica com: 1:0, 2:2
Conexão com: $(03)_{2,1}$ Operações disponíveis: E1- E2+ E2- E3+ só com dupla operação	Conexão com $(03)_{2,1}$ implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-002000 Classes de intervalos: 0 em comum: Tem: 2:1, 1:2 Perde: 2:1, 1:2 Recebe: 1:0, 2:2 Fica com: 1:0, 2:3

Subespaço



Fonte: dados do autor

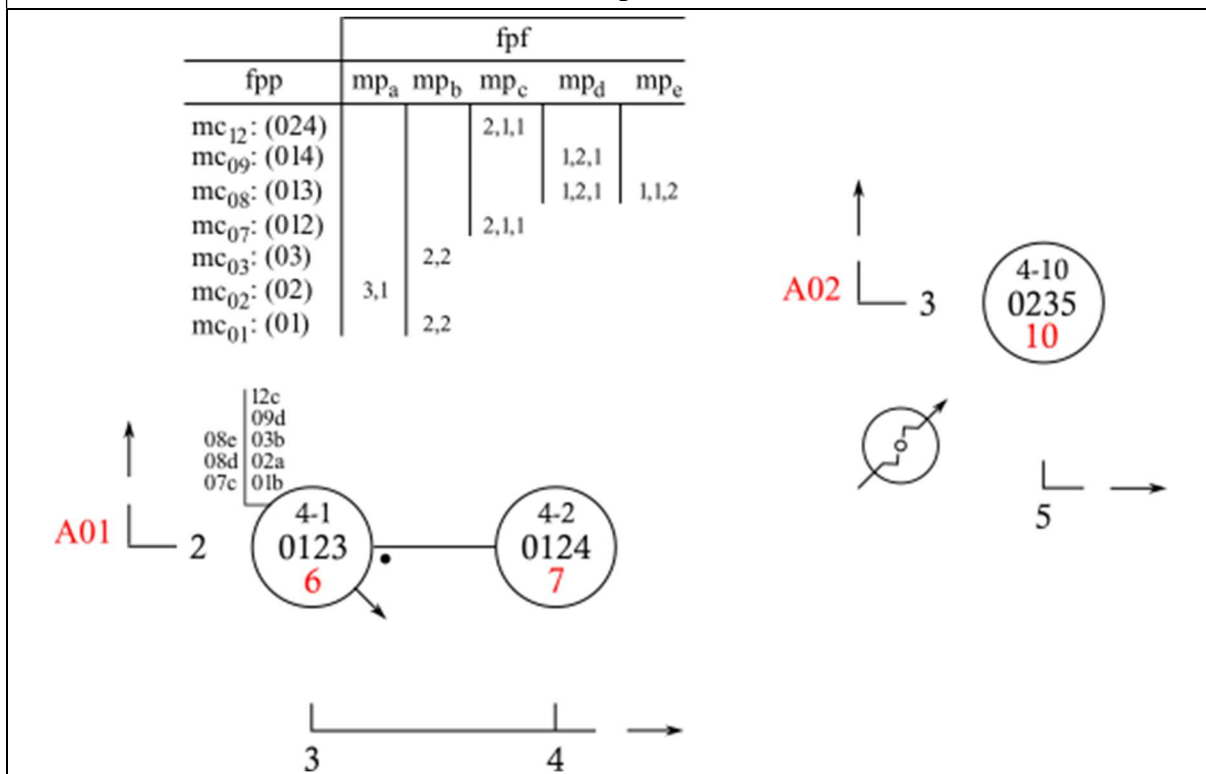
Quadro 5 – dados para 4-1 (0123).

4-1 (0123)	
Propriedades	
Classe de conjuntos: 4-1(0123) Classe de somas: 6 Vetor classe-intervalar: 321000 Vetor de índices: 123432100000 Graus de simetria (T_n, I_n): 1,1 Níveis de transposição: T_0 ; Níveis de inversão: I_3 ; Eixo(s) de simetria: 1/2-7/8 Complemento: 8-1 (01234567) Vetor classe-intervalar: 765442 Vetor de índices: 444456787654	Localização: C4A01La2Lo3 Quantidade de conexões: 3 com classes de conjuntos através de 6 operações; 8 com multiconjuntos através de 14 operações. Total de conexões: 11
Classes de conjuntos	
Operações	Intervalos
Conexão com: si mesmo Operações disponíveis: E1+ E2- E2+ E3- E3+ E4- só com dupla operação	Conexões com si mesmo: – mesmas características!
Conexão com: 4-2 (0124) Operações disponíveis: E1- E4+	Conexão com 4-2 (0124) implica: Movimento para C4A01La2Lo4 Diferença de classe de soma: +1 Classes de intervalos: 5 em comum: 2:1, 2:2, 1:3 Tem: 3:1, 2:2, 1:3 Perde: 1:1 Recebe: 1:4 Fica com: 2:1, 2:2, 1:3, 1:4
Conexão com: 4-10 (0235) Operações disponíveis: E1- E4+ só com dupla operação	Conexão com 4-10 (0235) implica: Movimento para C4A01La2Lo5 Diferença de classe de soma: +4 Classes de intervalos: 4 em comum: 1:1, 2:2, 1:3 Tem: 3:1, 2:2, 1:3 Perde: 2:1 Recebe: 1:3, 1:5 Fica com: 1:1, 2:2, 2:3, 1:5
Classes de multiconjuntos	
Operações	Intervalos
Conexão com: $(01)_{2,2}$ Operações disponíveis: E1+ E4-	Conexão com $(01)_{2,2}$ implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-400000

só com dupla operação	Classes de intervalos: 3 em comum: 3:1 Tem: 3:1, 2:2, 1:3 Perde: 2:2, 1:3 Recebe: 2:0, 1:1 Fica com: 2:0, 4:1
Conexão com: (02) _{3,1} Operações disponíveis: E1+ E3- E2+ E4- só com dupla operação	Conexão com (02) _{3,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 3-030000 Classes de intervalos: 2 em comum: 2:2 Tem: 3:1, 2:2, 1:3 Perde: 3:1, 1:3 Recebe: 3:0, 1:2 Fica com: 3:0, 3:2
Conexão com: (03) _{2,2} Operações disponíveis: E2- E3+ só com dupla operação	Conexão com (03) _{2,2} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-004000 Classes de intervalos: 1 em comum: 1:3 Tem: 3:1, 2:2, 1:3 Perde: 3:1, 2:2 Recebe: 2:0, 3:3 Fica com: 2:0, 4:3
Conexão com: (012) _{2,1,1} Operações disponíveis: E1+ E4-	Conexão com (012) _{2,1,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-320000 Classes de intervalos: 5 em comum: 3:1, 2:2 Tem: 3:1, 2:2, 1:3 Perde: 1:3 Recebe: 1:0 Fica com: 1:0, 3:1, 2:2
Conexão com: (013) _{1,2,1} Operações disponíveis: E2+ E3-	Conexão com (013) _{1,2,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-221000 Classes de intervalos: 5 em comum: 2:1, 2:2, 1:3 Tem: 3:1, 2:2, 1:3 Perde: 1:1 Recebe: 1:0 Fica com: 1:0, 2:1, 2:2, 1:3
Conexão com: (013) _{1,1,2} Operações disponíveis: E2- E3+	Conexão com (013) _{1,1,2} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-122000 Classes de intervalos: 4 em comum: 1:1, 2:2, 1:3

	Tem: 3:1, 2:2, 1:3 Perde: 2:1 Recebe: 1:0, 1:3 Fica com: 1:0, 1:1, 2:2, 2:3
Conexão com: $(014)_{1,2,1}$ Operações disponíveis: E1- E2+ E3- E4+ só com dupla operação	Conexão com $(014)_{1,2,1}$ implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-202100 Classes de intervalos: 3 em comum: 2:1, 1:3 Tem: 3:1, 2:2, 1:3 Perde: 1:1, 2:2 Recebe: 1:0, 1:3, 1:4 Fica com: 1:0, 2:1, 2:3, 1:4
Conexão com: $(024)_{2,1,1}$ Operações disponíveis: E1- E3+ E2- E4+ só com dupla operação	Conexão com $(024)_{2,1,1}$ implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-030200 Classes de intervalos: 2 em comum: 2:2 Tem: 3:1, 2:2, 1:3 Perde: 3:1, 1:3 Recebe: 1:0, 1:2, 2:4 Fica com: 1:0, 3:2, 2:4

Subespaço



Fonte: dados do autor

Quadro 6 – dados para 5-1 (01234).

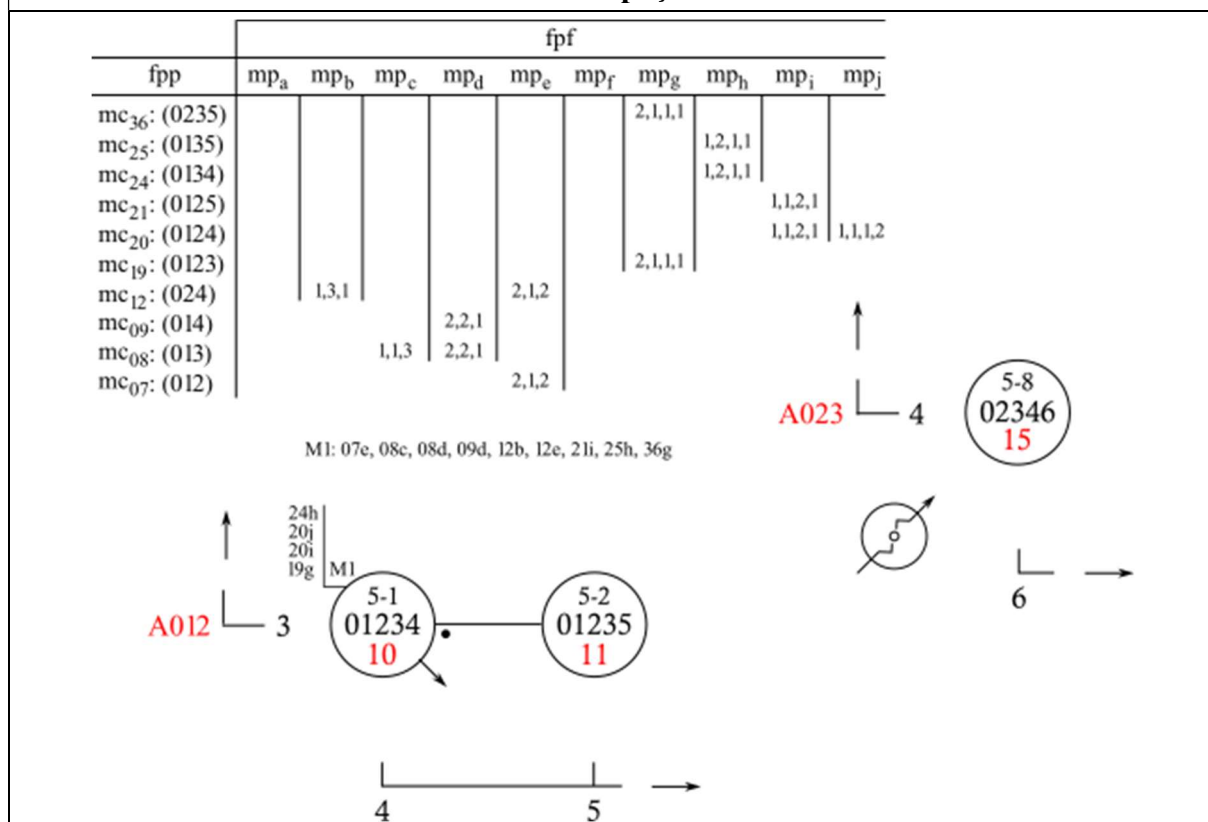
5-1 (01234)	
Propriedades	
Classe de conjuntos: 5-1(01234) Classe de somas: 10 Vetor classe-intervalar: 432100 Vetor de índices: 123454321000 Graus de simetria (T_n, I_n): 1,1 Níveis de transposição: T_0 ; Níveis de inversão: I_4 ; Eixo(s) de simetria: 2-8 Complemento: 7-1 (0123456) Vetor classe-intervalar: 654321 Vetor de índices: 223456765432	Localização: C5A012La3Lo4 Quantidade de conexões: 3 com classes de conjuntos através de 7 operações; 13 com multiconjuntos através de 23 operações. Total de conexões: 16
Classes de conjuntos	
Operações	Intervalos
Conexão com: si mesmo Operações disponíveis: E1+ E2- E2+ E3- E3+ E4- E4+ E5- só com dupla operação	Conexões com si mesmo: – mesmas características!
Conexão com: 5-2 (01235) Operações disponíveis: E1- E5+	Conexão com 5-2 (01235) implica: Movimento para C5A012La3Lo5 Diferença de classe de soma: +1 Classes de intervalos: 9 em comum: 3:1, 3:2, 2:3, 1:4 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 1:1 Recebe: 1:5 Fica com: 3:1, 3:2, 2:3, 1:4, 1:5
Conexão com: 5-8 (02346) Operações disponíveis: E1- E5+ só com dupla operação	Conexão com 5-8 (02346) implica: Movimento para C5A023La4Lo6 Diferença de classe de soma: +5 Classes de intervalos: 8 em comum: 2:1, 3:2, 2:3, 1:4 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 2:1 Recebe: 1:4, 1:6 Fica com: 2:1, 3:2, 2:3, 2:4, 1:6
Classes de multiconjuntos	
Operações	Intervalos
Conexão com: (012) _{2,1,2} Operações disponíveis:	Conexão com (012) _{2,1,2} implica: Movimento para multiconjuntos

E1+ E5- só com dupla operação	Vetor classe-intervalar: 2-440000 Classes de intervalos: 7 em comum: 4:1, 3:2 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 2:3, 1:4 Recebe: 2:0, 1:2 Fica com: 2:0, 4:1, 4:2
Conexão com: (013) _{1,1,3} Operações disponíveis: E1+ E5- E3+ E5- só com dupla operação	Conexão com (013) _{1,1,3} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 3-133000 Classes de intervalos: 6 em comum: 1:1, 3:2, 2:3 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 3:1, 1:4 Recebe: 3:0, 1:3 Fica com: 3:0, 1:1, 3:2, 3:3
Conexão com: (013) _{2,2,1} Operações disponíveis: E1+ E4- E2+ E5- só com dupla operação	Conexão com (013) _{2,2,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-422000 Classes de intervalos: 8 em comum: 4:1, 2:2, 2:3 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 1:2, 1:4 Recebe: 2:0 Fica com: 2:0, 4:1, 2:2, 2:3
Conexão com: (014) _{2,2,1} Operações disponíveis: E2- E3+ E3- E4+ só com dupla operação	Conexão com (014) _{2,2,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-204200 Classes de intervalos: 5 em comum: 2:1, 2:3, 1:4 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 2:1, 3:2 Recebe: 2:0, 2:3, 1:4 Fica com: 2:0, 2:1, 4:3, 2:4
Conexão com: (024) _{1,3,1} Operações disponíveis: E2+ E4- só com dupla operação	Conexão com (024) _{1,3,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 3-060100 Classes de intervalos: 4 em comum: 3:2, 1:4 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 4:1, 2:3 Recebe: 3:0, 3:2 Fica com: 3:0, 6:2, 1:4
Conexão com: (024) _{2,1,2} Operações disponíveis: E2- E4+ só com dupla operação	Conexão com (024) _{2,1,2} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-040400 Classes de intervalos:

	4 em comum: 3:2, 1:4 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 4:1, 2:3 Recebe: 2:0, 1:2, 3:4 Fica com: 2:0, 4:2, 4:4
Conexão com: (0123) _{2,1,1,1} Operações disponíveis: E1+ E5-	Conexão com (0123) _{2,1,1,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-432000 Classes de intervalos: 9 em comum: 4:1, 3:2, 1:3 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 1:4 Recebe: 1:0 Fica com: 1:0, 4:1, 3:2, 2:3
Conexão com: (0124) _{1,1,2,1} Operações disponíveis: E2+ E4-	Conexão com (0124) _{1,1,2,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-341100 Classes de intervalos: 8 em comum: 3:1, 3:2, 1:3, 1:4 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 1:1, 1:3 Recebe: 1:0, 1:2 Fica com: 1:0, 3:1, 4:2, 1:3, 1:4
Conexão com: (0124) _{1,1,1,2} Operações disponíveis: E2- E4+	Conexão com (0124) _{1,1,1,2} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-232200 Classes de intervalos: 8 em comum: 2:1, 3:2, 2:3, 1:4 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 2:1 Recebe: 1:0, 1:4 Fica com: 1:0, 2:1, 3:2, 2:3, 2:4
Conexão com: (0125) _{1,1,2,1} Operações disponíveis: E1- E2+ E4- E5+ só com dupla operação	Conexão com (0125) _{1,1,2,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-322110 Classes de intervalos: 8 em comum: 3:1, 2:2, 2:3, 1:4 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 1:1, 1:2 Recebe: 1:0, 1:5 Fica com: 1:0, 3:1, 2:2, 2:3, 1:4, 1:5
Conexão com: (0134) _{1,2,1,1} Operações disponíveis: E3+ E3-	Conexão com (0134) _{1,2,1,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-323110 Classes de intervalos: 8 em comum: 3:1, 2:2, 2:3, 1:4 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4

	Perde: 1:1, 1:2 Recebe: 1:0, 1:3 Fica com: 1:0, 3:1, 2:2, 3:3, 1:4
Conexão com: $(0135)_{1,2,1,1}$ Operações disponíveis: E1- E3+ E3- E5+ só com dupla operação	Conexão com $(0135)_{1,2,1,1}$ implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-323110 Classes de intervalos: 7 em comum: 2:1, 3:2, 1:3, 1:4 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 2:1, 1:3 Recebe: 1:0, 1:4, 1:5 Fica com: 1:0, 2:1, 3:2, 1:3, 2:4, 1:5
Conexão com: $(0235)_{2,1,1,1}$ Operações disponíveis: E1- E4+ E2- E5+ só com dupla operação	Conexão com $(0235)_{2,1,1,1}$ implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-133020 Classes de intervalos: 6 em comum: 1:1, 3:2, 2:3 Tem: 4:1, 3:2, 2:3, 1:4 Perde: 3:1, 1:4 Recebe: 1:0, 1:3, 2:5 Fica com: 1:0, 1:1, 3:2, 3:3, 2:5

Subespaço



Fonte: dados do autor

Quadro 7 – dados para 6-1 (012345).

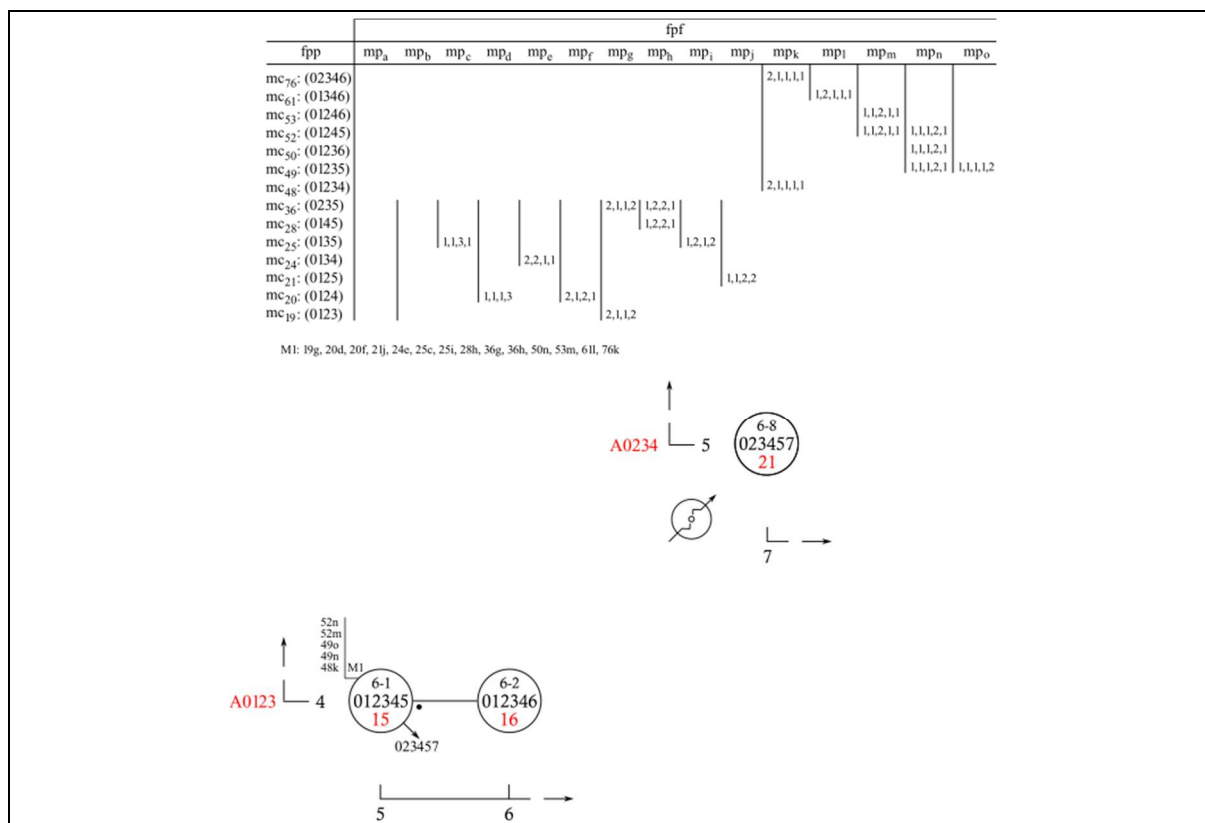
6-1 (012345)	
Propriedades	
Classe de conjuntos: 6-1(012345) Classe de somas: 15 Vetor classe-intervalar: 543210 Vetor de índices: 123456543210 Graus de simetria (Tn, In): 1,1 Níveis de transposição:T0; Níveis de inversão:I5; Eixo(s) de simetria: 2/3-8/9 Combinatoriedade (P, R, I, RI): 1, 1, 1, 1 Complemento: autocomplementar	Localização: C6A0123La4Lo5 Quantidade de conexões: 3 com classes de conjuntos através de 8 operações; 19 com multiconjuntos através de 34 operações. Total de conexões: 22
Classes de conjuntos	
Operações	Intervalos
Conexão com: si mesmo Operações disponíveis: E1+ E2- E2+ E3- E3+ E4- E4+ E5- E5+ E6- só com dupla operação	Conexões com si mesmo: – mesmas características!
Conexão com: 6-2 (012346) Operações disponíveis: E1- E6+	Conexão com 6-2 (012346) implica: Movimento para C6A0123La4Lo6 Diferença de classe de soma: +1 Classes de intervalos: 9 em comum: 3:1, 3:2, 2:3, 1:4 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 1:1 Recebe: 1:5 Fica com: 3:1, 3:2, 2:3, 1:4, 1:5
Conexão com: 6-8 (023457) Operações disponíveis: E1- E6+ só com dupla operação	Conexão com 6-8 (023457) implica: Movimento para C6A0234La5Lo7 Diferença de classe de soma: +6 Classes de intervalos: 9 em comum: 3:1, 3:2, 2:3, 1:4 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 1:1 Recebe: 1:5 Fica com: 3:1, 3:2, 2:3, 1:4, 1:5
Classes de multiconjuntos	
Operações	Intervalos
Conexão com: (0123) _{2,1,1,2} Operações disponíveis:	Conexão com (0123) _{2,1,1,2} implica: Movimento para multiconjuntos

E1+ E6- só com dupla operação	Vetor classe-intervalar: 2-544000 Classes de intervalos: 12 em comum: 5:1, 4:2, 3:3 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 2:4, 1:5 Recebe: 2:0, 1:3 Fica com: 2:0, 5:1, 4:2, 4:3
Conexão com: (0124) _{1,1,1,3} Operações disponíveis: E1+ E3- E4+ E6- só com dupla operação	Conexão com (0124) _{1,1,1,3} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 3-243300 Classes de intervalos: 11 em comum: 2:1, 4:2, 3:3, 2:4 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 3:1, 1:5 Recebe: 3:0, 1:4 Fica com: 3:0, 2:1, 4:2, 3:3, 3:4
Conexão com: (0124) _{2,1,2,1} Operações disponíveis: E1+ E5- E2+ E6- só com dupla operação	Conexão com (0124) _{2,1,2,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-461200 Classes de intervalos: 11 em comum: 4:1, 2:2, 1:3, 2:4 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 1:1, 2:3, 1:5 Recebe: 2:0, 2:2 Fica com: 2:0, 4:1, 6:2, 1:3, 2:4
Conexão com: (0125) _{1,1,2,2} Operações disponíveis: E2- E3+ E4- E5+ só com dupla operação	Conexão com (0125) _{1,1,2,2} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-324220 Classes de intervalos: 11 em comum: 3:1, 2:2, 3:3, 2:4, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 2:1, 2:2 Recebe: 2:0, 1:3, 1:5 Fica com: 2:0, 3:1, 2:2, 4:3, 2:4, 2:5
Conexão com: (0134) _{2,2,1,1} Operações disponíveis: E1+ E4- E3+ E6- só com dupla operação	Conexão com (0134) _{2,2,1,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-524200 Classes de intervalos: 12 em comum: 4:1, 3:2 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 2:2, 1:5 Recebe: 2:0, 1:3 Fica com: 2:0, 5:1, 2:2, 4:3, 2:4
Conexão com: (0135) _{1,1,3,1} Operações disponíveis: E2+ E4- E3+ E5-	Conexão com (0135) _{1,1,3,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 3-163110 Classes de intervalos:

só com dupla operação	10 em comum: 1:1, 4:2, 3:3, 1:4, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 4:1, 1:4 Recebe: 3:0, 2:2 Fica com: 3:0, 1:1, 6:2, 3:3, 1:4, 1:5
Conexão com: (0135) _{1,2,1,2} Operações disponíveis: E2- E4+ E3- E5+ só com dupla operação	Conexão com (0135) _{1,2,1,2} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-241420 Classes de intervalos: 10 em comum: 2:1, 4:2, 1:3, 2:4, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 3:1, 2:3 Recebe: 2:0, 2:4, 1:5 Fica com: 2:0, 2:1, 4:2, 1:3, 4:4, 2:5
Conexão com: (0145) _{1,2,2,1} Operações disponíveis: E3- E4+ só com dupla operação	Conexão com (0145) _{1,2,2,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-404410 Classes de intervalos: 10 em comum: 4:1, 3:3, 2:4, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 1:1, 4:2 Recebe: 2:0, 1:3, 2:4 Fica com: 2:0, 4:1, 4:3, 4:4, 1:5
Conexão com: (0235) _{2,1,1,2} Operações disponíveis: E2- E5+ só com dupla operação	Conexão com (0235) _{2,1,1,2} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-144040 Classes de intervalos: 9 em comum: 1:1, 4:2, 3:3, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 4:1, 2:4 Recebe: 2:0, 1:3, 3:5 Fica com: 2:0, 1:1, 4:2, 4:3, 4:5
Conexão com: (0235) _{1,2,2,1} Operações disponíveis: E2+ E5- só com dupla operação	Conexão com (0235) _{1,2,2,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 2-444010 Classes de intervalos: 12 em comum: 4:1, 4:2, 3:3, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 1:1, 2:4 Recebe: 2:0, 1:3 Fica com: 2:0, 4:1, 4:2, 4:3, 1:5
Conexão com: (01234) _{2,1,1,1,1} Operações disponíveis: E1+ E6-	Conexão com (01234) _{2,1,1,1,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-543200 Classes de intervalos: 14 em comum: 4:1, 3:2 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5

	Perde: 1:5 Recebe: 1:0 Fica com: 1:0, 5:1, 4:2, 3:3, 2:4
Conexão com: (01235) _{1,1,1,2,1} Operações disponíveis: E2+ E5-	Conexão com (01235) _{1,1,1,2,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-453110 Classes de intervalos: 13 em comum: 4:1, 4:2, 3:3, 1:4, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 1:1, 1:4 Recebe: 1:0, 1:2 Fica com: 1:0, 4:1, 5:2, 3:3, 1:4, 1:5
Conexão com: (01235) _{1,1,1,1,2} Operações disponíveis: E2- E5+	Conexão com (01235) _{1,1,1,1,2} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-343220 Classes de intervalos: 13 em comum: 3:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 2:1 Recebe: 1:0, 1:5 Fica com: 1:0, 3:1, 4:2, 3:3, 2:4, 2:5
Conexão com: (01236) _{1,1,1,2,1} Operações disponíveis: E1- E2+ E5- E6+ só com dupla operação	Conexão com (01236) _{1,1,1,2,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-434111 Classes de intervalos: 12 em comum: 4:1, 3:2, 3:3, 1:4, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 1:1, 1:2, 1:4 Recebe: 1:0, 1:3, 1:6 Fica com: 2:0, 4:1, 4:2
Conexão com: (01245) _{1,1,2,1,1} Operações disponíveis: E3+ E4-	Conexão com (01245) _{1,1,2,1,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-443210 Classes de intervalos: 14 em comum: 4:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 1:1 Recebe: 1:0 Fica com: 1:0, 4:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5
Conexão com: (01245) _{1,1,1,2,1} Operações disponíveis: E3- E4+	Conexão com (01245) _{1,1,1,2,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-433310 Classes de intervalos: 13 em comum: 4:1, 3:2, 3:3, 2:4, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 1:1, 1:2 Recebe: 1:0, 1:4

	Fica com: 1:0, 4:1, 3:2, 3:3, 3:4, 1:5
Conexão com: (01246) _{1,1,2,1,1} Operações disponíveis: E1- E3+ E4- E6+ só com dupla operação	Conexão com (01246) _{1,1,2,1,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-351311 Classes de intervalos: 11 em comum: 3:1, 4:2, 1:3, 2:4, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 2:1, 2:3 Recebe: 1:0, 1:2, 1:4, 1:6 Fica com: 1:0, 3:1, 5:2, 1:3, 3:4, 1:5, 1:6
Conexão com: (01346) _{1,2,1,1,1} Operações disponíveis: E1- E4+ E3- E6+ só com dupla operação	Conexão com (01346) _{1,2,1,1,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-334121 Classes de intervalos: 11 em comum: 3:1, 3:2, 3:3, 1:4, 1:5 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 2:1, 1:2, 1:4 Recebe: 1:0, 1:3, 1:5, 1:6 Fica com: 1:0, 3:1, 3:2, 4:3, 1:4, 2:5, 1:6
Conexão com: (02346) _{2,1,1,1,1} Operações disponíveis: E1- E5+ E2- E6+ só com dupla operação	Conexão com (02346) _{2,1,1,1,1} implica: Movimento para multiconjuntos Vetor classe-intervalar: 1-243302 Classes de intervalos: 11 em comum: 2:1, 4:2, 3:3, 2:4 Tem: 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 Perde: 3:1, 1:5 Recebe: 1:0, 1:4, 2:6 Fica com: 1:0, 2:1, 4:2, 3:3, 3:4, 2:6
Subespaço	



Fonte: dados do autor

Como já foi dito, seria inviável elencar aqui os 3.964 encadeamentos contidos no espaço atonal expandido de encadeamentos, mas as Tabelas de 16 a 19 a seguir sintetizam a quantidade de conexões com classes de conjuntos e multiconjuntos **diferentes** para cada classe de conjuntos em cada cardinalidade. No espaço de tricordes, há doze operações para doze classes de notas. O total de conexões é sempre igual ou menor ao de operações, pois há operações que se encadeiam com a mesma classe (replicação). Nas duas últimas colunas estão quantificadas a quantidade de conexões com classes de conjuntos (cc.) e com classes de multiconjuntos (cmc.) e, entre parênteses, estão as quantidades de operações que efetuam a conexão (esses números são sempre maiores ou iguais aos de conexões e sua soma é sempre igual a doze).

Tabela 16 – quantidades de conexões e operações para tricordes.

Classes	Soma	Total de conexões	Conexões com cc.	Conexões com cmc.
3-1 (012)	3	7	3 (5)	4 (7)
3-2 (013)	4	9	5 (7)	4 (5)
3-3 (014)	5	10	6 (8)	4 (4)
3-4 (015)	6	12	8 (8)	4 (4)
3-5 (016)	7	9	6 (8)	3 (4)
3-6 (024)	6	7	6 (10)	1 (2)
3-7 (025)	7	10	9 (11)	1 (1)
3-8 (026)	8	8	7 (11)	1 (1)
3-9 (027)	9	7	6 (11)	1 (1)

3-10 (036)	9	7	7 (12)	0 (0)
3-11 (037)	10	7	7 (12)	0 (0)
3-12 (048)	12	3	3 (12)	0 (0)
Totais		96 (144)	73 (115)	23 (29)

Fonte: dados do autor

No espaço de tetracordes, há vinte e nove classes de conjuntos e vinte operações disponíveis (a soma dos números entre parênteses deve ser sempre igual a vinte).

Tabela 17 – quantidades de conexões e operações para tetracordes.

Classes	Soma	Total de conexões	Conexões com cc.	Conexões com cmc.
4-1 (0123)	6	11	3 (6)	8 (14)
4-2 (0124)	7	19	7 (8)	12 (12)
4-4 (0125)	8	19	8 (9)	11 (11)
4-5 (0126)	9	19	8 (9)	11 (11)
4-6 (0127)	10	12	5 (9)	7 (11)
4-3 (0134)	8	12	5 (9)	7 (11)
4-11 (0135)	9	20	12 (12)	8 (8)
4-13 (0136)	10	20	13 (13)	7 (7)
4-Z29 (0137)	11	19	12 (13)	7 (7)
4-7 (0145)	10	12	6 (10)	6 (10)
4-Z15 (0146)	11	20	13 (13)	7 (7)
4-18 (0147)	12	18	12 (14)	6 (6)
4-19 (0148)	13	18	12 (14)	6 (6)
4-8 (0156)	12	12	6 (10)	6 (10)
4-16 (0157)	13	17	11 (13)	6 (7)
4-20 (0158)	14	12	9 (14)	3 (6)
4-9 (0167)	14	7	4 (10)	3 (10)
4-10 (0235)	10	12	8 (12)	4 (8)
4-12 (0236)	11	20	13 (13)	7 (7)
4-14 (0237)	12	16	10 (13)	6 (7)
4-21 (0246)	12	12	10 (17)	2 (3)
4-22 (0247)	13	18	16 (18)	2 (2)
4-24 (0248)	14	11	10 (18)	1 (2)
4-23 (0257)	14	12	11 (18)	1 (2)
4-27 (0258)	15	14	13 (19)	1 (1)
4-25 (0268)	16	6	5 (18)	1 (2)
4-17 (0347)	14	12	9 (14)	3 (6)
4-26 (0358)	16	9	8 (19)	1 (1)
4-28 (0369)	18	4	4 (20)	0 (0)
Totais		413 (580)	263 (385)	150 (195)

Fonte: dados do autor

Há trinta e oito classes de conjuntos e trinta operações disponíveis no espaço de pentacordes (a soma dos números entre parênteses deve ser sempre igual a trinta).

Tabela 18 – quantidades de conexões e operações para pentacordes.

Classes	Soma	Total de conexões	Conexões com cc.	Conexões com cmc.
5-1 (01234)	10	16	3 (7)	13 (23)
5-2 (01235)	11	28	7 (9)	21 (21)
5-4 (01236)	12	28	8 (10)	20 (20)
5-5 (01237)	13	23	6 (10)	17 (20)
5-3 (01245)	12	23	6 (10)	17 (20)
5-9 (01246)	13	27	10 (13)	17 (17)
5-Z36 (01247)	14	27	11 (14)	16 (16)
5-13 (01248)	15	29	13 (14)	16 (16)
5-6 (01256)	14	28	9 (11)	19 (19)
5-14 (01257)	15	29	13 (14)	16 (16)
5-Z38 (01258)	16	29	14 (15)	15 (15)
5-7 (01267)	16	28	9 (11)	19 (19)
5-15 (01268)	17	18	8 (14)	10 (16)
5-10 (01346)	14	29	13 (14)	16 (16)
5-16 (01347)	15	29	14 (15)	15 (15)
5-Z17 (01348)	16	17	8 (15)	9 (15)
5-Z12 (01356)	15	17	8 (14)	9 (16)
5-24 (01357)	16	30	19 (19)	11 (11)
5-27 (01358)	17	30	20 (20)	10 (10)
5-19 (01367)	17	24	11 (15)	13 (15)
5-29 (01368)	18	27	17 (20)	10 (10)
5-31 (01369)	19	25	17 (21)	8 (9)
5-Z18 (01457)	17	26	12 (15)	14 (15)
5-21 (01458)	18	24	12 (16)	12 (14)
5-30 (01468)	19	25	15 (20)	10 (10)
5-32 (01469)	20	22	14 (21)	8 (9)
5-22 (01478)	20	16	7 (16)	9 (14)
5-20 (01568)	20	24	10 (15)	14 (15)
5-8 (02346)	15	17	8 (13)	9 (17)
5-11 (02347)	16	29	13 (14)	16 (16)
5-23 (02357)	17	25	15 (19)	10 (11)
5-25 (02358)	18	23	14 (20)	9 (10)
5-28 (02368)	19	26	16 (20)	10 (10)
5-26 (02458)	19	28	18 (20)	10 (10)
5-33 (02468)	20	17	15 (26)	2 (4)
5-34 (02469)	21	15	13 (27)	2 (3)
5-35 (02479)	22	13	11 (27)	2 (3)
5-Z37 (03458)	20	17	9 (15)	8 (15)
Totais		908 (1.140)	446 (609)	462 (531)

Fonte: dados do autor

No espaço de hexacordes, há cinquenta classes de conjuntos e quarenta e duas operações disponíveis (a soma dos números entre parênteses deve ser sempre igual a quarenta e dois).

Tabela 19 – quantidades de conexões e operações para hexacordes.

Classes	Soma	Total de conexões	Conexões com cc.	Conexões com cmc.
6-1 (012345)	15	22	3 (8)	19 (34)
6-2 (012346)	16	39	7 (10)	32 (32)
6-Z36 (012347)	17	39	8 (11)	31 (31)
6-Z37 (012348)	18	22	5 (11)	17 (31)
6-Z3 (012356)	17	39	8 (11)	31 (31)
6-9 (012357)	18	40	12 (14)	28 (28)
6-Z40 (012358)	19	40	13 (15)	27 (27)
6-5 (012367)	19	39	9 (12)	30 (30)
6-Z41 (012368)	20	40	13 (15)	27 (27)
6-Z42 (012369)	21	23	9 (16)	14 (26)
6-Z38 (012378)	21	22	6 (12)	16 (30)
6-Z4 (012456)	18	23	5 (11)	18 (31)
6-Z11 (012457)	19	40	13 (15)	27 (27)
6-15 (012458)	20	39	13 (16)	26 (26)
6-Z12 (012467)	20	40	13 (15)	27 (27)
6-22 (012468)	21	38	17 (20)	21 (22)
6-Z46 (012469)	22	37	18 (21)	19 (21)
6-Z17 (012478)	22	40	14 (16)	26 (26)
6-Z47 (012479)	23	37	18 (21)	19 (21)
6-Z6 (012567)	21	23	6 (12)	17 (30)
6-Z43 (012568)	22	39	14 (16)	25 (26)
6-Z44 (012569)	23	38	14 (17)	24 (25)
6-18 (012578)	23	35	12 (16)	23 (26)
6-Z48 (012579)	24	24*	12 (21)	12 (21)
6-7 (012678)	24	16	4 (12)	12 (30)
6-Z10 (013457)	20	40	13 (15)	27 (27)
6-14 (013458)	21	34	11 (16)	23 (26)
6-Z13 (013467)	21	23	9 (16)	14 (26)
6-Z24 (013468)	22	39	18 (21)	21 (21)
6-27 (013469)	23	37	17 (22)	20 (20)
6-Z19 (013478)	23	36	14 (17)	22 (25)
6-Z49 (013479)	24	24	12 (22)	12 (20)
6-Z25 (013568)	23	39	18 (21)	21 (21)
6-Z28 (013569)	24	23	12 (22)	11 (20)
6-Z26 (013578)	24	24*	12 (21)	12 (21)
6-34 (013579)	25	25	15 (28)	10 (14)
6-30 (013679)	26	19	9 (22)	10 (20)
6-16 (014568)	24	40	14 (16)	26 (26)
6-31 (014579)	26	31	14 (22)	17 (20)
6-20 (014589)	27	10	5 (18)	5 (24)
6-Z50 (014679)	27	19	10 (22)	9 (20)
6-8 (023457)	21	23	8 (14)	15 (28)
6-Z39 (023458)	22	40	13 (15)	27 (27)
6-21 (023468)	23	39	18 (20)	21 (22)
6-Z45 (023469)	24	23	12 (21)	11 (21)
6-Z23 (023568)	24	24*	12 (21)	12 (21)

6-33 (023579)	26	31	18 (28)	13 (14)
6-Z29 (023679)	27	20	10 (22)	10 (20)
6-32 (024579)	27	18	12 (28)	6 (14)
6-35 (02468A)	30	6	5 (36)	1 (6)
Totais		1.521 (2.100)	577 (890)	944 (1.210)

Fonte: dados do autor

Dos dados das Tabelas de 16 a 19 emerge uma miríade de padrões que serão comentados na conclusão. Por ora é suficiente destacar alguns dados mais genéricos sobre as quatro tabelas: os encadeamentos com classes de multiconjuntos vão diminuindo à medida que as classes de conjuntos (ou classes de somas) vão crescendo e a quantidade de conexões tende a ser menor nos extremos inferior e superior. Não há classes de conjuntos que comecem com 03 e 04 no espaço de hexacordes e nos espaços de tetra e pentacordes não há classes de conjuntos que comecem com 04. As classes que têm mais conexões não têm operações replicantes (exceto hexacordes) e as que têm menos, obviamente, têm muitas replicações.

A classe de tricordes com mais conexões é 3-4 (015) com doze, sendo oito com outras classes de conjuntos e quatro com classes de multiconjuntos, ambas com, respectivamente, oito e quatro operações, portanto, sem replicação, quer dizer, todas as operações resultam em encadeamentos com classes diferentes; evidentemente 3-12 (048) é a que tem menos conexões, apenas três, todas com classes de conjuntos através de doze operações com nove replicações (a quantidade de replicações pode ser obtida diminuindo-se o número entre parênteses daquele que o antecede). Entre os tetracordes, há quatro com vinte conexões com classes de conjuntos e multiconjuntos: 4-11 (0135), 4-13 (0136), 4-Z15 (0137) e 4-12 (0236), todas sem replicação; a que tem menos conexões é 4-28 (0369), com apenas quatro conexões através de vinte operações. As duas classes de pentacordes que têm mais conexões são: 5-24 (01357) e 5-27 (01358), ambas com trinta e sem replicações; a que tem menos é 5-35 (02479) com treze, sendo onze com classes de conjuntos através de vinte e sete operações com dezesseis replicações e duas com multiconjuntos através de três operações com uma replicação apenas.

Como os hexacordes têm propriedades especiais tais como relação Z, complementos iguais a si próprios em alguns casos, combinatórias etc., há mais observações a fazer. Sempre há replicações nos encadeamentos com classes de conjuntos, mas há várias conexões com multiconjuntos sem replicações. Há dez classes de hexacordes que têm quarenta conexões e todas têm duas replicações nas conexões com classes de conjuntos e nenhuma nas conexões com classes de multiconjuntos; a que tem menos conexões é 6-35 (02468A), a coleção tons inteiros, com apenas seis encadeamentos através de trinta e seis operações com cinco classes

de conjuntos, sendo que trinta e cinco operações são replicadas e apenas uma única conexão com multiconjuntos através de seis operações sendo cinco delas replicantes.

Há uma característica adicional que só ocorre com hexacordes, marcados com asterisco na Tabela 19. As classes de conjuntos 6-Z48 (012579), 6-Z26 (013578) e 6-Z23 (023568) têm vinte e quatro conexões (metade do total disponível) distribuídas igualmente entre conexões com classes de conjuntos e classes de multiconjuntos, doze respectivamente e ambas com exatamente vinte e um encadeamentos (metade de operações para cada uma) e ambas com nove replicações.

Os dados individuais, e particularmente os totais dessas quatro tabelas, acrescentam uma informação mais precisa quanto à quantidade de conexões com classes de conjuntos e multiconjuntos diferentes, quer dizer, sem considerar replicações (que estão entre parênteses). Uma informação a mais na hora de tomar decisões sobre sua utilização com resultados compositivos diferentes.

Para encerrar esse capítulo há que se reforçar o auxílio que esses dados, apesar de aparentemente triviais, oferecem na tomada de decisões com respeito à escolha de encadeamentos: classes com menos encadeamentos podem resultar em estruturas mais uniformes, com mais unidade intervalar, ao passo que classes com mais encadeamentos podem prover mais variedade nesse sentido. Similarmente, operações replicantes permitem mais variedade de classes de notas com menos encadeamento, enquanto operações sem replicação dirigem-se para mais encadeamentos mais variados.

CAPÍTULO 4: APLICAÇÕES PRÁTICAS

Ainda que não sejam objetos principais desta tese, algumas sugestões de aplicações práticas do modelo podem ser discutidas. Assim como já se mostrou alhures (Bordini, 2018, p. 15-18), pode-se imaginar caminhos para atravessar o espaço inteiro ou orbitar alguma classe de conjuntos específica. Evidentemente, também se pode navegar ao sabor das ondas, ao seu bel-prazer. Vê-se lá ainda que o espaço para tricordes não pode ser atravessado inteiramente sem a aplicação de operações duplas. Como ele só tem doze classes de conjuntos, torna-se viável compor utilizando-as todas. Entretanto, para espaços maiores, há que se restringir talvez a quantidade de classes de modo a manter-se alguma unidade. Ou não, enfim, cada qual compõe como quer.

Divisado em princípio como modelo sistemático e auxiliar para elaboração de material pré-compositivo, o espaço pode servir também como auxiliar para análise musical e como material didático para ensino de música, por exemplo: solfejo de classes de conjuntos. A título de experimentação, parte-se aqui de um pequeno excerto musical pré-composto, explorado primeiramente do ponto de vista de um analista ao invés daquele do compositor, como se este não fosse aquele (tarefa difícil).

ANÁLISE

Quem quer que tenha pelo menos começado a estudar música sabe que a coisa toda no início é bem simples, mas rapidamente pode tornar-se bem complicada. Para o propósito deste capítulo, deixa-se as coisas em estado o mais simples possível, de modo que o objetivo pedagógico não seja a todo momento entrecortado por longas digressões explicativas como soe acontecer quando o analista não encontra o que esperava e passa a inventar teorias exóticas que justifiquem qualquer coisa.

A proposta é: identificar o material estrutural, estudar suas propriedades, estabelecer relações entre os elementos e encontrar se há encadeamentos por semitom agindo como fator de unidade estrutural. No excerto mostrado no Exemplo 1 a seguir, mesmo num relance, pode-se verificar que se trata de textura homofônica. Talvez um analista inexperiente ou teimoso, afeito ao repertório dos grandes melodistas, possa querer verificar antes se há algo no rastro das linhas horizontais, afinal, trata-se de um quarteto de cordas. Porém, talvez também de relance, lhe pareça que a coisa não é lá muito tonal. Nesse ponto, portanto, antes de pôr a mão na massa, conforme lhe aconselharam nas disciplinas de análise, é sempre recomendável fazer uma

redução e colocar as coisas em forma normal. Nesse processo, já se vão criando suposições, expectativas, previsões.

Exemplo 1 – um pequeno excerto musical.

Presto ed agitato ma senza incasinare il tutto.

The musical score consists of two systems. The first system includes Violino I, Violino II, Viola, and Violoncello. All parts start with a fortissimo (*ff*) dynamic and transition to pianissimo (*pp*) at measure 7. The second system includes Violino I (Vln. I), Violino II (Vln. II), Viola (Vla.), and Violoncello (Vcl.). Measures 10-11 are marked *mf*, measure 12 is *ff*, and measures 13-14 are marked *p* with a *molto rall.* instruction. The score uses various musical notations including slurs, ties, and dynamic markings.

Fonte: dados do autor

O analista então prepara a redução que se encontra no Exemplo 2 a seguir. Nela, já faz alguns apontamentos. Observa que, teimoso que é por natureza, melodicamente há bordaduras cromáticas em todas as vozes e pensa: “aí está, não disse?”. Em algum ponto remoto, num recanto escondido do seu cérebro, imagina ter ouvido algum xingamento ao compositor: “para que isso? esse monte de enarmonias? só para chatear a gente!”, mas não deu importância, preocupado que estava com copiar meticulosamente as notas. Meticuloso, anota as durações dos acordes já que as removeu para melhor se fixar nas notas, como todo bom analista. Marca também as notas repetidas com ligaduras. Observa, entretanto, que algumas notas repetidas estão em registros diferentes e pensa: “vou colocar isso em forma normal para ver melhor” (para não interromper a linha de raciocínio, deixa apenas anotado para fazê-lo depois). Em outra

parte remota de sua mente pensa: “que indicação de andamento mais esquisita! terá algo a ver com a música, tipo um título?”. Mas logo se dissipa a indagação já que há coisas mais importantes a procurar. Sua primeira redução fica assim como está no Exemplo 2.

Exemplo 2 – redução, segmentação e análise do excerto.

marcas analíticas indicando apenas as permutações das vozes (resmungão que é pensa: “ah, já vi tudo isso antes, nada de novo!”).

“Hum, os compassos de 10 a 16 têm configurações rítmicas diferentes,” pensa ele e preocupa-se em como irá segmentá-los já que parece haver dois eventos diferentes conforme sugerem as pausas a partir do compasso 13, no qual há um ponto culminante no registro agudo (lembra-se de ter pensado: “mas que diacho! por que uma pausa antes do ponto culminante?”). Depois de inumeráveis dúvidas, decide segmentar no ponto culminante já que há, depois da pausa, uma mudança brusca de registro e uma indicação de *molto rallentando* associado a um decrescendo. Com sua apurada percepção interna, aliada à sua esperteza visual, ambas acostumadas ao trato musical, comove-se ao perceber que há uma mudança na sonoridade geral da coisa a partir do compasso 10. Nem se preocupa mais com as vozes melódicas, sente que é importante agora ver o que acontece com a sonoridade. Sua redução confirma que as classes de conjuntos são diferentes das primeiras e incluem classes de intervalos diferentes, notadamente, classes de conjuntos que antes começavam todas com 01, agora começam com 02. Perplexo, vê a presença de (0136) no início do compasso 10 e no último tempo do compasso 12 (depois da pausa “fora do lugar”). Além disso, aparece também nos compassos 13, 15 e 16 no último tempo. Ora (pensa ele), essa classe de conjuntos começa a peça e termina a primeira frase no compasso 5, portanto, começa e termina a frase dos compassos 6 a 9 também. Esse camarada (pensa ele, que gosta de ter intimidade com as classes de conjuntos) é o centro organizador dessa coisa (ele gosta de chamar música de coisa). Admoesta-se por ter feito esse longo parêntese e retoma sua linha de pensamento, decidindo analisar o conteúdo classes-intervalar dos conjuntos. Sua hipótese é: a escolha dessas classes de conjuntos deve ter algo a ver com intervalos. Decide fazer então uma lista para ver se aquela mudança de sonoridade está relacionada com as classes-intervalares. Sempre cuidadoso, coloca as classes de conjuntos na ordem em que aparecem na coisa, não excluindo repetições, assim como está no Quadro 7.

Quadro 8 – conteúdo classe-intervalar em comparação.

Classe de conjuntos	Vetor classe-intervalar	Características
(0136)	112011	Não tem ci4, tem duas ci3; para (0137) perde uma ci3 e ganha uma ci4.
(0137)	111111	Tem uma de todas as classes de intervalos; para (0126) perde uma ci3 e ganha uma ci1.
(0126)	210111	Não tem ci3, tem duas ci1; para (0135) perde uma ci1, uma ci6 e ganha uma ci2.
(0135)	121110	Não tem ci6, tem duas ci2; para (0146) perde uma ci2 e ganha uma ci6.
(0146)	111111	Tem uma de todas as classes de intervalos; para (0136) perde uma ci4 e ganha uma ci3.

(0136)	112011	Para (0236) perde uma ci5 e ganha uma ci4.
(0236)	112101	Não tem ci5, tem duas ci3; para (0247) perde uma ci0, ci3, uma ci6 e ganha uma ci2 e duas ci5.
(0247)	021120	Não tem ci1 nem 6, tem duas ci2 e duas ci5; para (0136) perde uma ci2, uma ci4, uma ci5 e ganha uma ci1, uma ci3 e uma ci4.
(0136)	112011	Para (0236) perde uma ci4 e ganha uma ci3.
(0236)	112101	Para (0136) perde uma ci4 e ganha uma ci5.
(0136)	112011	Para (0247) perde uma ci1, uma ci3, uma ci6 e ganha uma ci2, uma ci4 e uma ci5.
(0247)	021120	Para (025) perde uma ci2, uma ci4, uma ci5 e ganha nada!
(025)	011010	Não tem ci1, ci3, ci5 nem ci6; tem duas ci2; para (0136) perde nada! e ganha uma ci1, uma ci3 e uma ci6.
(0136)	112011	Para (036) perde uma ci1, uma ci2, uma ci5 e ganha nada!
(036)	002001	Não tem ci1, ci2, ci4, ci5; tem duas ci3; para (0136) perde nada! e ganha uma ci1, uma ci2 e uma ci5.
(0136)	112011	-

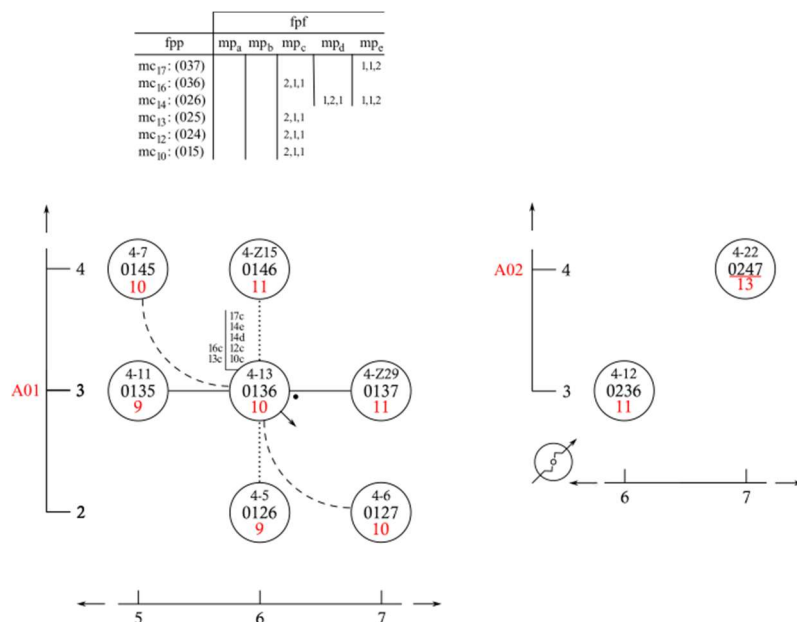
Fonte: dados do autor

Exausto e confuso diz-lhe ele: “as mudanças de classes de intervalos entre as classes de conjuntos não mostram algum princípio ou padrão consistente. Sei que a hipótese está correta, mas não posso refutá-la nem posso confirmá-la.” As tétrades em geral perdem e ganham uma classe de intervalos apenas, mas outras perdem duas ou mais. Estava ciente de que formas primas são abstrações e podem levar a falsas deduções (ver nota de rodapé 51), mas aquelas tríades encapsuladas por tétrades estavam muito discrepantes. De novo, naquele cantinho obscuro de sua mente ouviu um xingamento endereçado ao compositor: “que diacho estão fazendo aquelas tríades no final da coisa?”.

Triste, cansado, decepcionado, desolado, pensa em mudar de profissão. Nesse estado lastimável, deita-se, repousa a cabeça no travesseiro (amigo inseparável dos bons analistas) e a muito custo adormece, tendo repassado centenas de vezes todas as suas investigações, escrutínios de dados e perquirições. Em sonho, aparece-lhe o Yoda da análise musical que diz: “o espaço! do espaço lembrar deve! a força!”. Sobressalta-se e sente que “as fichas estão caindo!”. Lera em alguma tese que havia multiconjuntos e talvez aqueles tricordes fossem, na verdade, tetracordes com uma nota repetida e os intervalos que não ganhavam eram ganhos como classes de intervalos 0 (zero). Só precisa agora verificar qual função desempenha aquele renitente (0136) e poderia então desvelar o princípio organizador da coisa toda. Procurando em seus alfarrábios, encontra uma tese em que havia um modelo do espaço atonal de

encadeamentos, localiza (0136) e o que se vê na Figura 5 foi o que naquele instante lhe iluminou todos os córtices cerebrais, assim como um raio de luz na escuridão tenebrosa da ignorância faz os neurônios sorrirem pululando feito fogos de artifício.

Figura 7 – o espaço de encadeamentos para (0136).



Fonte: dados do autor

Lá estava o malvado, no centro das tétrades com as quais se encadeia por semitom.⁵³ Sentindo-se em paz consigo mesmo, fez uma libação às musas da análise musical e deu-se por muito satisfeito. Lá naquele cantinho escuro reservado para xingamentos, pareceu ouvir: “ah, por aqui não passa seu cretino!”. Há quem diga que foi visto rindo à toa naquele dia.

COMPOSIÇÃO

Sob o aspecto compositivo, nada há a acrescentar, posto que a composição analisada foi composta tendo em mente o espaço atonal expandido de encadeamentos. Mas pode ser importante prescrever algumas orientações sobre o uso do espaço como auxiliar na geração de material pré-compositivo, pois há questões metodológicas importante a serem observadas.

A coisa mais importante de se ter em mente a todo instante é que as formas primas é que estão encadeadas por semitom, não necessariamente os conjuntos. Estes podem ou não ter todos os elementos em comum, exceto um que está separado de outro por semitom

⁵³ No espaço de encadeamentos para (0136), os códigos 13c e 16c correspondem respectivamente a (025) e (036). O sinal em vermelho com a letra a indica que há outros encadeamentos, mas são feitos por operações duplas e o exemplo usa exclusivamente operações simples. Há outras classes de conjuntos que também estão encadeadas por semitom, mas selecionou-se apenas as que resultam de operações simples.

entre os conjuntos encadeados. Este é um princípio altamente abstrato assim como o é o conceito de forma prima.

O Quadro 8 apresenta o que pode acontecer quando se faz operações sequenciais em conjuntos cujos resultados são transposições ou inversões, estando ou não em forma normal. Parte-se arbitrariamente de (037) que está em forma prima e, portanto, em forma normal. Ainda arbitrariamente, deseja-se encadeá-lo com (026). Há três operações para fazê-lo.

Quadro 9 – problemas metodológicos na geração de material para composição.

Origem	Forma prima da origem	Forma prima de Destino	Operações	Resultados	Formas normais
[0, 3, 7]	(037)	(026)	E1+ E2+ E3- E2- E3+	[1, 3, 7] T ₁ [0, 4, 6] I ₆ (0, 2, 8) I ₂	[1, 3, 7] [0, 4, 6] [8, 0, 2]
[1, 3, 7]		(016)		[1, 2, 7] T ₁ (1, 2, 8) I ₂	[1, 2, 7] [8, 1, 2]
[0, 4, 6]	(026)	(036)? (037)?	E2- E2- E3+	[0, 3, 6] [0, 3, 7]	[0, 3, 6] [0, 3, 7]
[0, 2, 8]		(015)? (014)?		(0, 1, 8) (0, 1, 9)	[8, 0, 1] [9, 0, 1]

Fonte: dados do autor

A primeira operação E1+ resulta em [1, 3, 7] que é T₁ de (026) e está em forma normal. A segunda operação E2+|E3- resulta em [0, 4, 6] que é I₆ de (026) e está em forma normal. A terceira operação E2-|E3+ resulta em (0, 2, 8) que é I₂ de (026), mas não está em forma normal, que é [8, 0, 2]. Deseja-se agora encadear esses resultados tendo como destino a classe de conjuntos (016) e há duas operações para fazê-lo. Vê-se que o conjunto que estava em forma normal, e não estava invertido, foi encadeado corretamente com (016), mas os outros não. Para se ter certeza de que as operações sequenciais estão encadeando corretamente os conjuntos, deve-se desinvertê-los (não necessariamente com a mesma inversão) e colocá-los em forma normal, ou seja, é o mesmo que realizar as operações sempre sobre a forma prima do conjunto e depois transpor ou inverter à vontade.

Para desinverter um conjunto usa-se o mesmo índice de inversão para retornar à sua forma originária. Para operar sequencialmente os conjuntos invertidos, pode-se invertê-los a qualquer nível porquanto retornarão a uma de suas transposições e, colocando-as em forma normal, se já não estiverem, pode-se continuar operando sequencialmente obtendo-se assim diferentes classes de notas. Uma outra possibilidade também interessante é procurar a inversão que preserva a maior quantidade de classes de notas em comum. O Quadro 9 corrige os encadeamentos do Quadro 8 com os dois casos: aplicando-se a mesma inversão (retorno ao conjunto original) e arbitrariamente invertendo em torno de zero. Os resultados estão todos

corretos, mas com diferentes classes de notas, o que pode ser mais interessante musicalmente. Desinvertendo-se [0, 4, 6] à I_6 e (0, 2, 8) à I_2 , ambos retornam para (026). Invertendo-se [0, 4, 6] à I_0 obtém-se (0, 8, 6) cuja forma normal é [6, 8, 0] e fazendo o mesmo com (0, 2, 8) obtém-se (0, A, 4) cuja forma normal é [A, 0, 4].

Quadro 10 – desinvertendo para corrigir operações sequenciais.

Origem	Forma prima da origem	Forma prima de Destino	Operações	Resultados	Formas normais
[0, 2, 6]	(026)	(016)	E2- E2- E3+	[0, 1, 6] T_0 (0, 1, 7) I_1	[0, 1, 6] [7, 0, 1]
[6, 8, 0]				[6, 7, 0] T_6 (6, 7, 1) I_7	[6, 7, 0] [1, 6, 7]
[A, 0, 4]				[A, B, 4] T_{10} (A, B, 5) I_{11}	[A, B, 4] [5, A, B]

Fonte: dados do autor

Com multiconjuntos há sempre o aparecimento da classe de intervalos 0 (zero) e para os encadeamentos entre dois multiconjuntos de classes de notas ou entre um multiconjunto de classes de notas e um conjunto de classes de notas, o mesmo princípio se aplica. O Quadro 10 a seguir simula o prosseguimento das operações sequenciais almejando o encadeamento de (016) com $(05)_{2,1}$, ou seja, com (005). Todos os conjuntos corretamente encadeados desde (037) até (016), em suas formas normais, são agora encadeados com (005). As operações que efetuam esses encadeamentos são: $E1+$ e $E2-|E3+$. Observe-se que no Quadro 8 o resultado [8, 1, 2] é uma inversão e, portanto, precisa ser desinvertido, nesse caso, arbitrariamente em torno de zero (4, B, A), em forma normal [A, B, 4], mas poderia ser igualmente de volta para o originário (016), ou qualquer outra inversão. O mesmo acontece no Quadro 9 com [7, 0, 1], [1, 6, 7] e [5, A, B] que estão nas formas invertidas. Apenas [7, 0, 1] foi desinvertido em torno de zero e colocado em forma normal no Quadro 10, já que os outros conjuntos são redundantes e foram excluídos. Entretanto, em todos os casos, as classes de intervalos repetidas replicarão diferentes classes de notas do conjunto.

Quadro 11 – operações sequenciais envolvendo multiconjuntos.

Origem	Forma prima da origem	Forma prima de Destino	Operações	Resultados	Formas normais
[1, 2, 7]	(016)	(005)	E1+ E2- E3+	[2, 2, 7] (1, 1, 8)	[2, 2, 7] [8, 1, 1]
[A, B, 4]				[B, B, 4] (A, A, 5)	[B, B, 4] [5, A, A]
[0, 1, 6]				[1, 1, 6] (0, 0, 7)	[1, 1, 6] [7, 0, 0]
[5, 6, B]				[6, 6, B] (5, 5, 0)	[6, 6, B] [0, 5, 5]

[6, 7, 0]

[7, 7, 0]
(6, 6, 1)

[7, 7, 0]
[1, 6, 6]

Fonte: dados do autor

Assim como há formas primas para conjuntos de classes de notas, também as há para multiconjuntos de classes de notas. Pode-se observar no Quadro 10 que as operações simples replicam o primeiro número quando em forma normal e as duplas replicam o segundo número quando em forma normal. Mas como a inversão de (055) é (005), conforme se viu anteriormente na metodologia sobre multiconjuntos, apenas (005), que é a forma preferida, é utilizada. Porém há alguma diferença evidente entre ter uma nota replicada em vez de outra. Por isso, ao compor, é bom manter o percurso com as formas normais, usando a forma prima apenas para certificar-se de estar no caminho certo, se isso for desejável.

O fato é que o processo de selecionar material para composição pelo encadeamento por semitons provê diversidade: só nesses poucos exemplos de uso sequencial de operações há mais de uma dezena de tétrades diferentes e unidade: todos o material está encadeado segundo um mesmo princípio. Acerca de seguir o caminho “certo ou errado”, observe-se, entretanto, que não há certo ou errado em composição. Um resultado ainda que “incorreto” pode ser musicalmente efetivo.

ENSINO DE MÚSICA

O treinamento auditivo fora de contextos modais-tonais deve – se já não o é – ser objeto de estudo para disciplinas de teoria e percepção musical. Fora do escopo desta tese, mas estreitamente ligada ao tópico, está a questão de como praticar o solfejo e o ditado a partir das classes de notas e, por isso, incluem-se aqui algumas reflexões sobre o processo de ensino desse material, sem pretender delinear um método completo ou discutir novos paradigmas de ensino.

Pode-se começar com o estudo das díades não restritas à (01), (02), (03), (04), (05) e (06), mas incluindo (07), (08), (09), (0A) e (0B).⁵⁴ A primeira justa ou oitava (00), tratada como multiconjunto, também pode ser estudada. Importante é deixar claro que qualquer intervalo maior do que 6 pode ser invertido em seu complemento que está entre 1 e 6 e que intervalos maiores do que a oitava (inclusive) podem ser reduzidos por módulo 12. Pode-se iniciar o estudo a partir da escala cromática e depois, com o Dó fixo (igual a zero) como um pedal grave, sucessiva e alternadamente, ir atingindo os outros intervalos mais agudos pode ser um bom

⁵⁴ Na teoria dos conjuntos de classes de notas usam-se as letras A e B em substituição aos números 10 e 11. Em inglês são usadas as letras T e E respectivamente, mas como essas letras não fazem sentido em português, optou-se por A e B como é corrente nos sistemas de numeração de base 12.

início. O mesmo exercício, mas com movimento contrário, começando com o pedal agudo e movendo-se para os intervalos mais graves também pode ser praticado. O treinamento de enarmônicos, que não deve ser desprezado no estudo de solfejo em contextos de música não tonal, assume importância capital.

Além disso, combinações entre todos os intervalos podem ser sistematicamente estudados. Não é demasiado praticar os exercícios inicialmente com os nomes das notas e em seguida com os números que correspondem às classes de notas. Conforme se vai progredindo e automatizando os exercícios, pode-se passar progressivamente a usar apenas os números, mesmo lendo as notas. Particularmente desafiador é entoar o mesmo som lido com nomes diferentes, mas com o mesmo número. O Exemplo 3 a seguir traz algumas dessas possibilidades.⁵⁵

Exemplo 3 – solfejos e ditados com as diádes.

The image displays seven staves of musical notation, each representing a different exercise. The notes are written on a single-line staff, and the fingerings are indicated by numbers 0 through 9 below the notes. The exercises involve various intervals and sequences of notes, including diads (pairs of notes) and scales. The notation includes sharp and flat symbols to indicate specific pitches. The exercises are designed to be practiced with a pedal (Dó) and other notes, as indicated by the text.

Fonte: dados do autor

⁵⁵ Nos exercícios em que a nota Dó é repetida como pedal intercalada com outras notas não se indicou o número zero, mas a nota Dó ou o 0 devem ser entoados nos solfejos.

Evidentemente, apesar de seu potencial de prover técnica e desenvoltura na entoação de classes de notas, o exercício sistemático pode logo se tornar maçante. A criação de pequenos trechos compostos com finalidade didática trará, supostamente, mais interesse e estímulo aos praticantes. O Exemplo 4 apresenta um solfejo (ou ditado ou ambos) em que alguns intervalos são explorados com a finalidade de demonstrar sua aplicação didática. Inicialmente, desenhado para trabalhar intervalos, o exemplo em tela não aborda classes de conjuntos encadeadas por semitom, o que será feito mais adiante.

Exemplo 4 – aplicação criativa com finalidade didática.

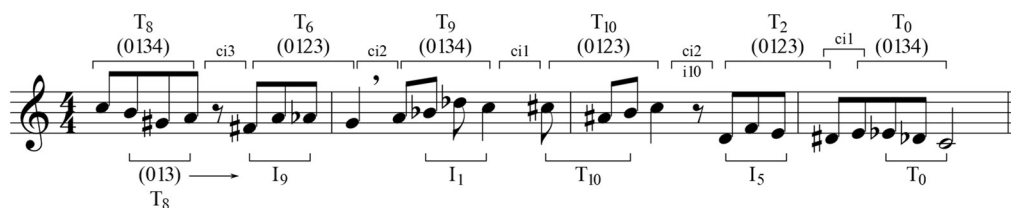
Tranquilo e sem medo



Fonte: dados do autor

Ofereceu-se um exemplo um tanto simples, já que não se trata de propor uma obra prima, mas um material didático. Crê-se que o estudo deve começar com uma audição do trecho todo e depois passar-se a trabalhar detalhes até que haja segurança para sua correta execução. Como deveria soar, uma análise deve ser feita previamente à execução do exemplo. O primeiro fato a ser observado é que todas as classes de conjuntos estão presentes. Os agrupamentos de quatro e de três notas indicados no Exemplo 5 demonstram que para as tétrades há apenas duas classes de conjuntos: (0134) e (0123) e para as tríades apenas uma: (013). Evidentemente, (013) é comum a ambas as tétrades.⁵⁶

Exemplo 5 – uma análise do excerto didático.



Fonte: dados do autor

À primeira vista, pode-se segmentar a frase inteira em seis motivos de quatro notas demarcados que estão por pausas e sinais de respiração, à exceção do fragmento medial em que não há separação posto que os dois segmentos são contíguos. A análise encontra as tétrades

⁵⁶ A abreviatura **i** refere-se ao termo: intervalo e **ci** refere-se aos termos: classe de intervalos. Assim, por exemplo, **i9** significa intervalo 9 (quantidade de semitons, equivalente à sexta maior) e **ci3** significa classe de intervalos 3 (que inclui terças menores, sextas maiores e quaisquer de seus equivalentes enarmônicos).

como sendo ambas simétricas por inversão, de modo que só há doze transposições. Tomando as formas primas das tétrades e da tríade como T_0 , o Exemplo 5 identifica as formas primas das tétrades alternando-se nos quatro primeiros motivos e alterando a ordem nos dois últimos (o salto de maior amplitude em redundância com a pausa, segmenta fortemente esse final).

Nota-se também que os dois tetracordes contêm uma tríade em comum e pode-se iniciar o estudo do solfejo praticando os vários contornos em que aparece: $ci3$ descendente seguida de $ci1$ na direção contrária, depois invertida no segundo, inversão transposta no terceiro, invertida no quarto (volta ao contorno inicial), invertida no quinto e em forma escalar retrógrada no final. Uma vez que (013) esteja bem consolidada, basta acrescentar um semitom no início ou no final da tríade para se chegar aos tetracordes. Importante é trabalhar os intervalos entre os motivos que vão se tornando cada vez mais comprimidos até que o $i10$ ($ci2$) conduz para o final.

O Exemplo 4 (e evidentemente o 5) não incluiu classes de conjuntos encadeadas por semitom por se tratar de um exemplo inicial para prática de intervalos. Passa-se agora a propor um material de estudo vinculado mais diretamente ao espaço de encadeamentos, não sem antes sugerir-se atividades preparatórias para dar mais segurança ao estudo do solfejo. O Exemplo 6 sugere um exercício preparatório para praticar algumas das muitas inversões e rotações possíveis com as classes de conjuntos usadas no Exemplo 7, que introduz modificações no Exemplo 4 de modo que (0134) que não se encadeia com (0123) por semitom, passe a encadear-se com (0124) e este com (0134), ou seja, diretamente (0134) e (0123) não estão encadeados por semitom, mas ambos estão com (0124).

Exemplo 6 – prática preparatória envolvendo inversões e rotações.

Fonte: dados do autor

No Exemplo 6, o primeiro sistema apresenta as classes de intervalos em forma prima (como forma normal, escalar) seguida de sua inversão (em torno de zero). O segundo sistema aplica uma rotação nas duas últimas notas de cada fragmento e o terceiro mais uma rotação.

Pode-se ampliar o exercício inserindo rotações começando com cada classe de notas e eventualmente transpondo os exercícios. A prática de reescrita enarmônica também oferece benefícios para a desenvoltura em contextos não tonais.

A melodia do Exemplo 7 agora pode ser realizada com mais facilidade. As modificações são: o segundo fragmento agora começa com Fá natural e essa modificação é suficiente para transformar (0123) em (0124), as duas últimas notas do terceiro fragmento foram transpostas um semitom abaixo, o que é suficiente para transformar (0134) em (0123), as últimas três notas do quarto fragmento foram transpostas um semitom abaixo, o que é suficiente para transformar (0123) em (0124) e o final agora tem duas instâncias de (0124) obtidas pelo acréscimo de um bemol na primeira nota do quinto fragmento e um ré natural na penúltima nota.

Exemplo 7 – melodia modificada.

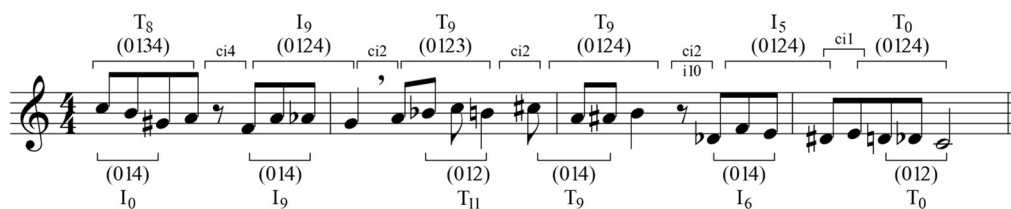
Tranquilo e confiante



Fonte: dados do autor

O Exemplo 8 reconstrói a análise da melodia alterada e se pode verificar que (013) não é mais uma partícula comum (poderia ser, mas não é). Agora pode ser melhor trabalhar (014), que fica enfatizado no início de cada fragmento motivico e (012) que se manifesta em apenas dois locais. Depois é só acrescentar um semitom no início ou no final de cada partícula.

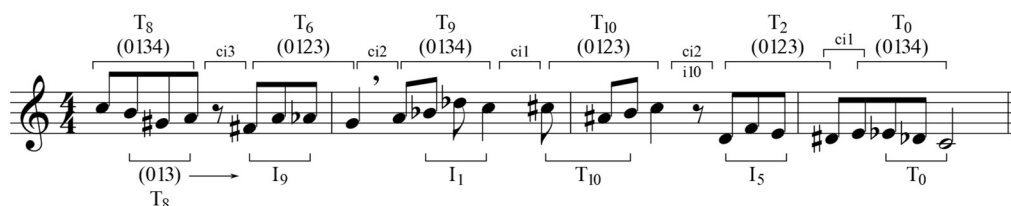
Exemplo 8 – análise da melodia alterada.

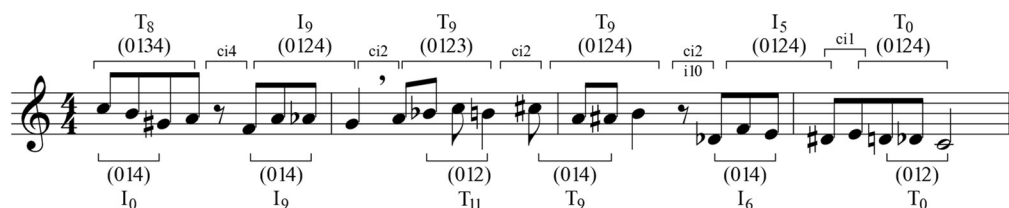


Fonte: dados do autor

Para fins de comparação, as análises das duas melodias estão coligidas no Exemplo 9.

Exemplo 9 – comparação entre as duas análises.



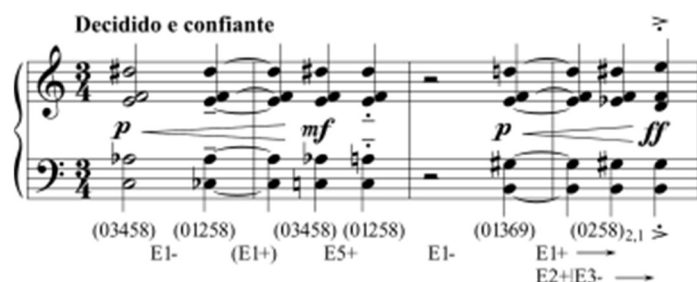


Fonte: dados do autor

Apesar de sofrer modificações mínimas, há mudanças substantivas na sonoridade geral e na constituição motívica dos fragmentos melódicos. Não se pretende julgar se uma é melhor que outra, apenas que a segunda está encadeada com classes de conjuntos que se conectam no espaço de encadeamentos.

A prática de encadeamentos por semitom em instrumentos harmônicos pode trazer muitos benefícios para a formação profissional, mas, além disso, abre um campo enorme de possibilidades harmônicas (no sentido de estruturas verticais). O Exemplo 10 exibe apenas uma das talvez milhares de possibilidades de encadear classes de conjuntos separadas por semitom.

Exemplo 10 – estudo de encadeamentos com pentacordes.



Fonte: dados do autor

Partindo-se arbitrariamente de 5-Z37 (03458), verifica-se que ele pode encadear-se com 5-Z38 (01258) através de duas operações: E1- e E5+. Pode-se experimentar aplicar as duas operações que resultarão em dois pentacordes com uma nota diferentes, mas ambos pertencentes à mesma classe de conjuntos. Para tanto, efetua-se a primeira operação E1- que transforma (03458) em (B,3,4,5,8) que é uma transposição e não está em forma normal que é [3, 4, 5, 8, B]. Mas antes de efetuar a segunda operação, deve-se voltar ao conjunto original desfazendo a primeira operação. Para desfazer a operação deve-se efetuar a operação com sinal contrário, mas sem colocar o conjunto em forma normal, pois nesse caso a operação resultará em outra classe de conjuntos. Portanto, sobre (B, 3, 4, 5, 8) aplica-se E1+ e retorna-se para (03458). Então aplica-se E5+ que transforma (03458) em (0,3,4,5,9), cuja forma prima é (01258), mas nesse caso terminou-se com uma inversão que não está em forma normal. Assim,

para seguir adiante com outra operação sequencial, arbitrariamente almejando ir para 5-31 (01369), deve-se desinverter (0,3,4,5,9) e colocá-lo em forma normal. Pode-se desinverter voltando para a forma prima (ou efetuar qualquer outra inversão), mas escolhe-se aqui aplicar a inversão que mantém a maior quantidade de classes de notas em comum, que é I8. Então I8 transforma (0,3,4,5,9) em (3,4,5,8,B) aqui já com o resultado em forma normal. Agora então pode-se efetuar E1- que transforma (3,4,5,8,B) em (2,4,5,8,B) cuja forma prima é 5-31 (01369). Novamente, o resultado é uma inversão e para prosseguir, diga-se para (0258)_{2,1,1,1} que é uma classe de multiconjuntos encadeada por semitom com 5-31 (01369), refaz-se o procedimento de desinverter e colocar em forma normal antes de efetuar ou E1+ ou E2|E3-, já que ambas mapeiam 5-31 (01369) em (0258)_{2,1,1,1}. Aplicando-se I5 em (2,4,5,8,B) obtém-se (2,3,5,8,B) já em forma normal. Ao efetuar-se E1+ em (2,3,5,8,B) chega-se em (3,3,5,8,B) e efetuando-se E2+|E3- resulta em (2,4,4,8,B), ambas instâncias de (0258), sendo que (3,3,5,8,B) é uma transposição que já está em forma normal e (2,4,4,8,B) é uma inversão. Para obter a forma prima do primeiro basta transpor para T₀ que é (00258) e do segundo então inverte-se em torno de zero que resulta em (A,8,8,4,1) cuja forma normal é [8, 8, A, 1, 4] e forma prima (00258). A forma prima pai de (00258) é (0258)_{2,1,1,1}.

Ademais, para terminar este último capítulo, há que se mencionar que, para além do treinamento através de exercícios didáticos, o solfejo, o ditado e a execução instrumental de peças do repertório de referência são desejáveis, não só pela prática mais musical que proveem, mas para melhor familiarização com os diversos contextos em que as classes de notas são utilizadas e especialmente quando relacionadas por encadeamentos por semitom. Por fim, enfatiza-se que o treinamento de ditados atonais é tão importante quanto o solfejo. Evidentemente há o problema de escrita enarmônica⁵⁷ com possíveis acertos com as variantes de escrita quando se escrevem as notas na pauta. Isso dificulta sua correção, mas nada que seja impossível de se fazer e é um problema inexistente quando se usam números. Todos os exemplos mencionados nesse item podem ser aplicados como ditados.

⁵⁷ Não se poderia dizer melhor do que o disse Ilza Nogueira: a enarmonia, certamente, é um "quebra-cabeças" para o compositor na escrita da música não tonal. Nesse sentido, encontro muitos exemplos de escrita de que discordo. Acho que a condução vocal é um princípio de orientação inegável. Vejo que alguns jovens compositores não se preocupam (raciocinam) muito sobre a definição da nota enarmônica na escrita pós-tonal. Até mesmo na escrita "semitonal", quando o software resolve definir por si (eles resolvem ter autonomia...), o compositor não percebe, parece-me que não foi instruído a raciocinar sobre isso [informação colhida em mensagem eletrônica privada].

CONCLUSÃO

A partir dos dois projetos de estágio pós-doutoral chega-se a este trabalho através do percurso de um longo caminho. Parte-se a literatura gerada pelos formuladores da teoria dos conjuntos de classes de notas norte-americana sob a qual o espaço atonal de encadeamentos está lastreado. Traça-se a sua migração para o Brasil e sua disseminação através dos trabalhos de análise e ensino de pioneiros que a empregaram em suas produções seminais e chega-se ao contexto em que o autor desta tese colige sua própria atuação referente ao tópico.

Para a elaboração do modelo de espaço pretendido, constata-se a importância que os multiconjuntos adquirem quando se verifica que as operações simples tradicionais, e mais ainda a nova operação dupla, resultam nesse tipo de conjunto especial em que as classes de notas podem ser repetidas com o consequente problema de como tratá-los, especialmente com relação à obtenção de sua forma prima. A metodologia para obter os dados referentes aos encadeamentos dá conta de 3.964 cálculos feitos em planilhas de cálculo e sua conversão em formas primas através do PCN e do Zarlino, consequentemente, há mais 3.964 resultados a serem examinados. Uma grande quantidade de dados como essa exige máxima atenção quanto à exatidão dos dados, os quais foram perquiridos manualmente várias vezes e posteriormente também cotejados por algoritmos computadorizados.

A ordenação dos dados em dois suportes distintos, porém complementares, foi concebida com o propósito de oferecer o máximo de informações sobre a configuração do espaço com suas conexões com a utilização de convenções simbólicas e códigos de localização no primeiro suporte e, no segundo, dados exaustivos sobre as características das classes de conjuntos e multiconjuntos, as operações que efetuam os encadeamentos e os dados acerca da perda e ganho de classes de intervalos a cada encadeamento. Dados estatísticos sobre a quantidade de operações, de multiconjuntos e de encadeamentos para cada cardinalidade além de uma mostra de como os dados são apresentados nos dois modelos completam o material que é o fulcro da tese. Se incluídos no corpo deste trabalho os dados completos preencheriam centenas de páginas e, por isso, remete-se o leitor a visitar os vários suportes que estão acessíveis *online* em: <https://musica.ufma.br/bordini/eavls>.

O fecho do trabalho dá-se com sugestões sobre a utilização do espaço atonal expandido de encadeamentos em análise, composição e ensino de música. A aplicação prática do espaço nesses três domínios implica em diferentes abordagens. Na análise, a busca por padrões de classes de conjuntos, seja por investigação de intervalos seja por transposição ou inversão de

motivos, pode não encontrar o princípio organizador quando este está fundado em encadeamentos por semitom, conforme demonstrado no texto. A geração de material compositivo requer especial atenção quando se efetua operações consecutivas sobre uma coleção inicial. Há que se ter o cuidado de colocar sempre o resultado em forma normal no caso de a operação resultar em uma transposição, e no caso de inversões, desinverter tanto aplicando a mesma inversão, o que faz a coleção voltar para o estado anterior (portanto, sem obtenção de novas classes de notas) quanto aplicando outra inversão (em torno de zero por exemplo, o que coloca a coleção de volta ao estado original, mas eventualmente com novas classes de notas) e conferindo se o resultado está em forma normal. O não atendimento a esses procedimentos implica em encadeamentos “incorretos” e deve-se mencionar que não há procedimento incorreto em composição, a menos, obviamente, que se esteja buscando como princípio organizador uma sequência de encadeamentos “corretos”.

Ainda que não divisada inicialmente como base para aplicações em ensino de música, quer-se crer que os procedimentos sugeridos acompanhados de exemplos tanto de técnica quanto de entoação e reconhecimento podem auxiliar na formação musical de quem pretende aventurar-se no campo da música não tonal.

Para encerrar este documento, apresenta-se uma última coleção de quadros para confirmar o que se disse na tese: a expansão do espaço atonal de encadeamentos pela inclusão de uma nova operação replica e amplia os encadeamentos tradicionais provendo mais diversidade e opções de encadeamentos. Pode-se ver assim com mais amplitude o que a expansão obtida pela adição dessa operação dupla oferece tanto em termos de replicação de encadeamentos – oferecendo mais variedade, porém mantendo-se na mesma classe de conjuntos – quanto de novas conexões não alcançadas pelas operações simples, provendo ainda mais variedade, ressaltando-se que algumas dessas operações duplas que resultam diferentes das simples, não se encadeiam por apenas um semitom, mas ainda assim, estão muito proximamente relacionadas.

Algumas observações preliminares constantemente verificáveis nos quadros seguintes são as seguintes: de modo geral, com poucas exceções, as operações simples e as duplas que se conectam com multiconjuntos são exclusivas, quer dizer, encadeiam-se com classes de multiconjuntos diferentes. Quando há operações simples e duplas que efetuam o mesmo encadeamento, nas operações simples sempre há reciprocidade, ou seja, a operação que encadeia uma classe em outra será a mesma que encadeia a outra de volta para a anterior, porém

com o sinal contrário, por exemplo E3+ encadeia 3-2 (013) com 3-3 (014) e E3- remete 3-3 (014) de volta para 3-2 (013). O mesmo padrão não se verifica com as operações duplas. Algumas operações simples e duplas mapeiam a classe nela mesma e nesse caso a classe está sublinhada para facilitar a identificação.

Quadro 12 – operações simples replicadas por duplas para tricordes.

Tricordes			
Com classes de conjuntos	Encadeiam-se com:	Com classes de multiconjuntos	Encadeiam-se com:
3-2 (013)			
E2+ E1+ E2-	<u>3-2 (013)</u>	E1+ E2+ E3-	(02) _{2,1}
E3+ E1- E2+	3-3 (014)	Não há	
3-3 (014)			
E3- E2+ E3-	3-2 (013)	Não há	
E1- E1- E2+	3-7 (025)		
3-5 (016)			
E3+ E1+ E2-	<u>3-5 (016)</u>	E1+ E2- E3+	(05) _{2,1}
E2+ E1- E3+	3-8 (026)	Não há	
3-7 (025)			
E1+ E2+ E3-	3-3 (014)	Não há	
E3+ E1- E2+	3-8 (026)		
3-8 (026)			
E2- E2- E3+	3-5 (016)	Não há	
E3- E2+ E3-	3-7 (025)		
E1- E1- E2+ E1- E3+	3-11 (037)		
3-11 (037)			
E1+ E2+ E3- E2- E3+	3-8 (026)	Não há	
E2+ E3+ E1- E2+ E1- E3+	<u>3-11 (037)</u>		

Fonte: dados do autor

Não há operações simples replicadas por duplas no espaço para tetracordes! Para os pentacordes, observa-se que há muitas replicações de operações que mapeiam a classe nela mesma e sempre há um padrão nas operações duplas envolvidas, por exemplo, E5+, E1+|E2-, E2+|E3- e E3+|E4- mapeiam a classe 5-5 (01237) em si mesma e as operações duplas exibem um padrão em que o último elemento de uma operação é o primeiro com o sinal trocado do próximo e, em alguns casos, há uma lacuna, mas ainda assim seguindo a sequência. Por exemplo, E3+, E1+|E2-, E2+|E3- e E4+|E5- mapeiam a classe 5-3 (01245) em si mesma e as operações duplas têm inicialmente o mesmo padrão, porém a última, em vez de seguir a sequência iniciando com E3+|E4-, salta diretamente para E4+|E5-. Há operações duplas que replicam encadeamentos de operações simples com as mesmas classes de multiconjuntos, porém, com multiplicidades diferentes e por isso não foram consideradas. **E não são poucas.** Se há replicação de operações simples com duplas, pode ou não haver duplicação com multiconjuntos, mas não há replicação só de multiconjuntos. As operações simples que mapeiam a classe nela mesma são poucas, a grande maioria é efetuada por operações duplas. Em alguns casos pode haver até três operações duplas replicando uma simples. Enfatiza-se a ampliação das possibilidades de encadeamento com operações diferentes conferindo variedade de classes de notas convergindo para a mesma classe de notas ou de multiconjuntos.

Quadro 13 – operações simples replicadas por duplas para pentacordes.

Pentacordes			
Com classes de conjuntos	Encadeiam-se com:	Com classes de multiconjuntos	Encadeiam-se com:
5-5 (01237)			
E5+ E1+ E2- E2+ E3- E3+ E4-	<u>5-5 (01237)</u>	E1+ E4- E5+	(0126) _{2,1,1,1}
E4+ E1- E5+	5-Z36 (01247)	E3+ E2- E5+	(0137) _{1,1,2,1}
		E2+ E3- E5+	(0237) _{1,2,1,1}
5-3 (01245)			
E3+ E1+ E2- E2+ E3- E4+ E5-	<u>5-3 (01245)</u>	E4+ E2- E3+	(0125) _{1,1,1,2}
E5+ E1- E3+	5-9 (01246)	E1+ E3+ E5-	(0134) _{2,1,1,1}
		E2+ E3+ E4-	(0135) _{1,2,1,1}
5-9 (01246)			

E5- E3+ E5-	5-3 (01245)	Nenhuma	
E1- E1- E3+	5-23 (02357)		
5-Z36			
E4- E4- E5+	5-5 (01237)	Nenhuma	
E1- E1- E5+	5-25 (02358)		
5-19 (01367)			
E3+ E1+ E2- E4+ E5-	<u>5-19 (01367)</u>	E4+ E2- E3+	(0137) _{1,1,1,2}
E5+ E1- E3+	5-29 (01368)	E1+ E3+ E5-	(0146) _{1,1,1,2}
E2+ E3+ E4-	5-Z18 (01457)		
5-29 (01368)			
E5- E3+ E5-	5-19 (01367)	Nenhuma	
E3+ E1- E4+	5-30 (01468)		
E1- E1- E3+	5-35 (02479)		
5-31 (01369)			
E2+ E1+ E2-	<u>5-31 (01369)</u>	E1+ E2+ E3-	(0258) _{2,1,1,1}
E3+ E1- E2+	5-32 (01469)		
E5+ E2+ E4-	5-25 (02358)		
E4+ E2+ E5-	5-28 (02368)		
5-Z18 (01457)			
E4+ E3- E4+	5-19 (01367)	Nenhuma	
E2+ E2+ E3-	5-23 (02357)		
5-21 (01458)			
E5+ E1+ E2- E3+ E4-	<u>5-21 (01458)</u>	E3+ E2- E5+	(0158) _{1,1,2,1}
E4+ E1- E5+	5-30 (01468)	E1+ E4- E5+	(0347) _{2,1,1,1}
E2+ E3- E5+	5-26 (02458)		
5-30 (01468)			
E3- E1- E3+	5-29 (01368)	Nenhuma	

E4- E4- E5+	5-21 (01458)		
E5+ E1- E4+	5-32 (01469)		
E3+ E3- E4+	5-20 (01568)		
E1- E1- E5+	5-35 (02479)		
5-32 (01469)			
E3- E2+ E3-	5-31 (01369)	E1+ E2- E4+	(0358) _{2,1,1,1}
E5- E1- E3+	5-30 (01468)		
E4+ E1+ E2-	<u>5-32 (01469)</u>		
E3+ E4+ E5-	5-22 (01478)		
E5+ E3- E4+	5-28 (02368)		
E2+ E1- E4+	5-34 (02469)		
E1- E1- E2+	5-35 (02479)		
5-22 (01478)			
E1- E5+ E1- E2+ E4- E5+	5-32 (01469)	Nenhuma	
E3+ E3- E2+ E3- E3+ E4-	5-20 (01568)		
5-20 (01568)			
E3- E1- E5+	5-30 (01468)	E3+ E4+ E5-	(0157) _{1,1,1,2}
E5+ E3- E4+	5-22 (01478)		
E4+ E1+ E2- E3+ E4-	<u>5-20 (01568)</u>		
E2+ E1- E4+	5-28 (02368)		
5-23 (02357)			
E1+ E3+ E5-	5-9 (01246)	E2+ E3+ E4-	(0247) _{1,1,2,1}
E4+ E2- E3+	5-Z18 (01457)		
E3+ E2+ E3-	<u>5-23 (02357)</u>		

E5+ E1- E3+	5-25 (02358)		
5-25 (02358)			
E1+ E4- E5+	5-Z36 (01247)	E2+ E3- E5+	(0358) _{1,2,1,1}
E1- E1- E3+	5-31 (01369)		
E5- E3+ E5-	5-23 (02357)		
E5+ E2+ E3-	<u>5-25 (02358)</u>		
E4+ E1- E5+	5-28 (02368)		
E3+ E2- E5+	5-26 (02458)		
5-28 (02368)			
E5+ E2- E5+	5-31 (01369)	Nenhuma	
E1- E1- E5+	5-32 (01469)		
E4+ E2- E4+	5-20 (01568)		
E4- E4- E5+	5-24 (02358)		
5-26 (02458)			
E2- E2- E5+	5-21 (01458)	Nenhuma	
E3- E3- E5+	5-25 (02358)		
5-34 (02469)			
E2- E3+ E1- E3+ E2- E4+	5-32 (01469)	Nenhuma	
E1- E4+ E1- E4+	5-35 (02479)		
5-35 (02479)			
E1+ E3- E1- E4+ E3+ E5-	5-29 (01368)	Nenhuma	
E4+ E5- E1- E2+ E2- E3+	5-30 (01468)		
E2+ E2- E1- E5+	5-32 (01469)		

E3+ E4-		
E4- E5+ E1- E3+	5-34 (02469)	

Fonte: dados do autor

Não há operações simples replicadas por duplas no espaço para hexacordes! Há ao todo noventa e dois encadeamentos com operações simples replicadas por duplas sendo quinze no espaço para tricordes e setenta e sete no espaço para pentacordes. Pode haver uma operação simples replicada por uma dupla, uma simples e duas duplas ou duas simples e duas duplas no espaço para tricordes. No espaço para tetracordes, há ainda a replicação de uma simples e três duplas, e duas simples e duas duplas. A maior parte das replicações se dá nos encadeamentos com classes de conjuntos (cc.), já com classes de multiconjuntos (cmc.) somente há replicação de uma simples com uma dupla e em quantidade menor, obviamente. O detalhamento está na Tabela 20 a seguir.

Tabela 20 – operações simples replicadas por duplas.

Cardinalidade	Simples e duplas	Com cc.	Com cmc.
3	1 e 1	10	2
	1 e 2	2	
	2 e 2	1	
Subtotal			15
5	1 e 1	50	14
	1 e 2	3	
	1 e 3	2	
	2 e 1	2	
	2 e 2	6	
Subtotal			77
Total			92

Fonte: dados do autor

As operações duplas com encadeamentos exclusivos totalizam 39 para tricordes, 237 para tetracordes, 568 para pentacordes e 1.071 para hexacordes perfazendo 1.915 novos encadeamentos. Portanto, um aumento substantivo de encadeamentos em relação ao espaço tradicional.

No espaço atonal expandido de encadeamentos para hexacordes encontram-se alguns encadeamentos especiais. Eles ocorrem exclusivamente com alguns pares de classes de conjuntos Z-relacionados,⁵⁸ mas não com todos eles. Há vinte e quatro encadeamentos (doze

⁵⁸ Pares de conjuntos Z-relacionados compartilham o mesmo vetor classe-intervalar, porém não são relacionados nem por inversão nem por transposição. Como seus vetores intervalares são iguais, ao se encadearem, permanecem com as mesmas quantidades de classes de intervalos.

pares) que mantêm todos as classes de intervalos em comum, portanto ou não trocam intervalos ou eles mapeiam-se uns nos outros. As classes que apresentam essa propriedade estão relacionadas no Quadro 14 a seguir.

Quadro 14 – encadeamentos especiais com hexacordes.

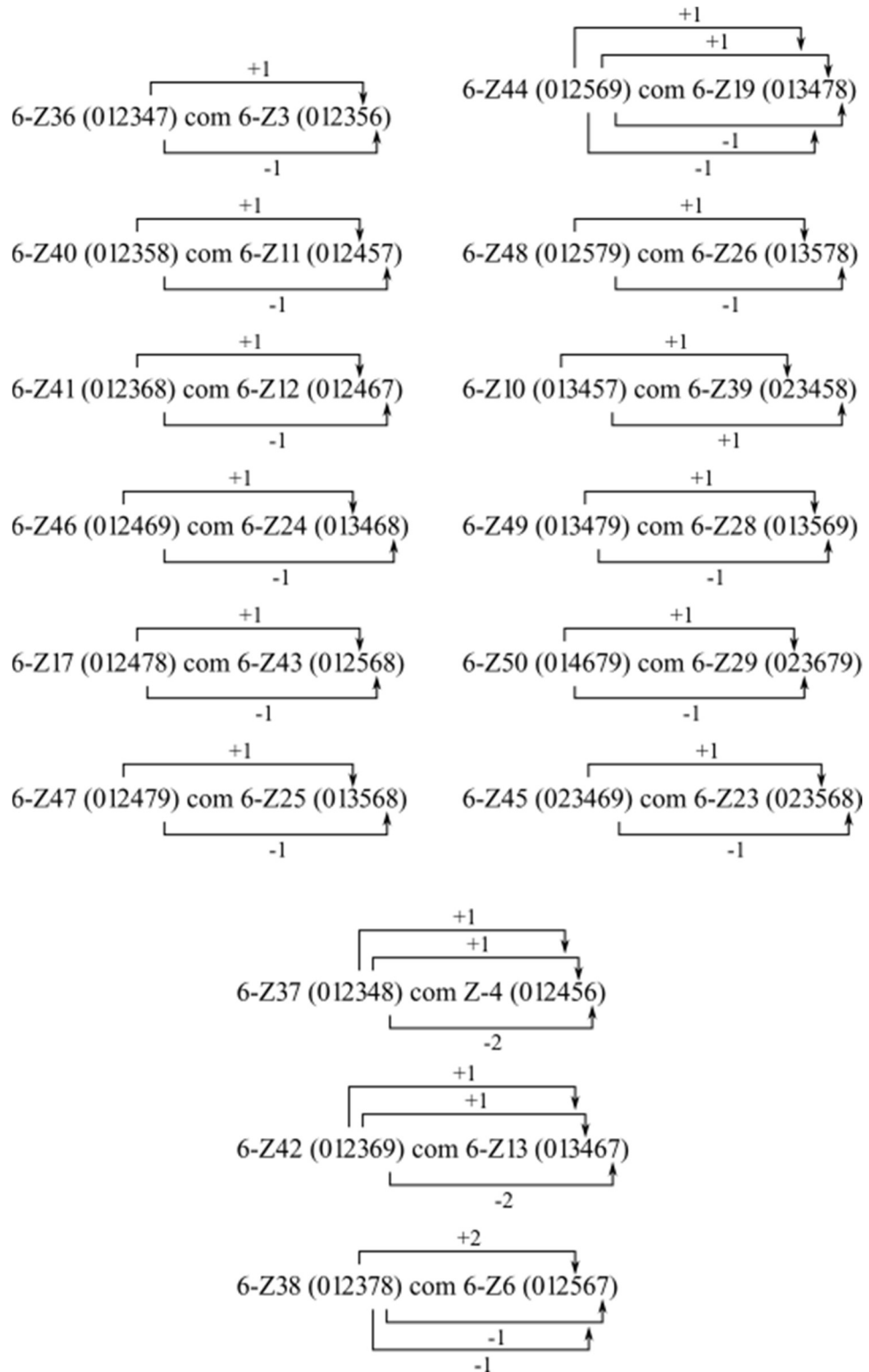
Encadeamentos	Dif. de somas	Operações
6-Z36 (012347) com 6-Z3 (012356)	0	E5+ E6- e E5- E6+
6-Z40 (012358) com 6-Z11 (012457)	0	E4+ E6- e E4- E6+
6-Z41 (012368) com 6-Z12 (012467)	0	E4+ E6- e E4- E6+
6-Z46 (012469) com 6-Z24 (013468)	0	E1- E6+ e E1- E2+ E3+ E6- e E3- E6+
6-Z17 (012478) com 6-Z43 (012568)	0	E4+ E5- e E4- E5+
6-Z47 (012479) com 6-Z25 (013568)	0	E1- E5+ e E1- E3+
6-Z44 (012569) com 6-Z19 (013478)	0	E1- E6+ e E1- E2+
6-Z48 (012579) com 6-Z26 (013578)	0	E1- E4+ e E1- E4+ E3+ E6- e E3- E6+
6-Z10 (013457) com 6-Z39 (023458)	+2 -2	E1- E2+ e E5+ E6-
6-Z49 (013479) com 6-Z28 (013569)	0	E1- E6+ e E1- E2+ E4+ E5- e E4- E5+
6-Z50 (014679) com 6-Z29 (023679)	0	E1- E6+ e E1- E5+ E2+ E3- e E2- E3+ E3- E5+ e E2- E6+ E4- E6+ e E4- E5+
6-Z45 (023469) com 6-Z23 (023568)	0	E2- E6+ e E1- E3+ E4+ E6- e E4- E6+

Fonte: dados do autor

Os pares de hexacordes 6-Z37 (012348) com Z-4 (012456), 6-Z42 (012369) com 6-Z13 (013467) e 6-Z38 (012378) com 6-Z6 (012567) não se encadeiam com seus pares. Dos quinze pares, apenas 6-Z10 (013457) com 6-Z39 (023458) tem diferença de classe de soma +2 (ou -2), todos os outros têm diferença igual a zero. Dos doze pares que se encadeiam um com o outro, dez têm dois elementos que estão separados por +1 e -1 semitons, um que tem três elementos separados por semitom (6-Z44 e 6-Z19) e um que tem dois elementos separados por +1 semitom (Z-10 e Z39), os três restantes que não se encadeiam têm dois elementos separados por semitom e um por dois semitons. No caso dos doze encadeados, sempre há a compensação de +1 com -1 semitons, exceto no caso de Z-10 e Z39, em que os dois elementos estão separados por +1 semitons, e a falta de compensação explica sua diferença de soma de +2 (ou -2). No caso dos três que não se encadeiam, ainda que haja compensação de +1, +1 e -2 (ou de -1, -1 e +2 no caso de Z-38) e sua diferença de classes de somas seja igual a zero, as operações duplas não os encadeiam.⁵⁹ A Figura 6 a seguir mostra essas características.

⁵⁹ Reitera-se aqui a referência feita na nota de rodapé 51 sobre a abstração das formas primas.

Figura 8 – pares Z-relacionados e sua estrutura.



Fonte: dados do autor

A conclusão desta tese se dá com duas constatações: a primeira é que apesar de todos os esforços direcionados para a exatidão dos dados, apesar de contar-se com verificações manuais e automáticas, devido à grande quantidade de dados, ainda que manipulados com redobrada

atenção, há certamente erros, poucos, acredita-se, mas os há. Para mitigar esse problema, os dados estarão sob constante revisão e roga-se ao leitor atento que se os encontrar envie mensagens para rm.bordini@ufma.br, pelo que desde já se depositam imorredouros agradecimentos. A segunda constatação é a de que longe de estar terminada, esta tese precisa de aprofundamentos e a extensão desses aprofundamentos requererá outra (ou outras) de igual ou maior porte.

Quer-se crer que pelo fato de grande parte do trabalho ter sido feita manualmente, ao invés de se analisar os dados prontos como acontece com processamentos automatizados, acompanhar passo a passo a sua fazedura permitiu um olhar ao mesmo tempo mais panorâmico e pormenorizado. Daí, apenas à guisa de mera listagem, os seguintes desenvolvimentos futuros se assomam: 1) estudo dos espaços de encadeamentos para classes de multiconjuntos; 2) estudo de padrões dos compostos de distribuição de classes de intervalos; 3) estudo de encadeamentos com hexacordes Z-relacionados; 4) estudo de mapeamento de classes de intervalos entre os encadeamentos; 5) estudo de leis gerais de encadeamento; e 6) estudo de traçados mais eficientes para os gráficos de encadeamentos.

Muito do que está na listagem foi vislumbrado durante a confecção do trabalho, o mais das vezes por inúmeras repetições de padrões recorrentes, mas são apenas indícios intuitivos, sem exame formal. Entretanto, pode-se fazer algumas considerações como por exemplo: constata-se que o espaço de classes de multiconjuntos é composto de oitenta e seis formas primas pai que são a rigor as formas primas das classes de conjuntos cuja cardinalidade tem um elemento a menos e nunca menos de dois elementos do que a cardinalidade em apreço com as formas primas filhas assumindo compostos de multiplicidades finitos (trinta e um) quando os encadeamentos estão restritos às operações simples e duplas e cabe, portanto, estudar como o espaço de multiconjuntos se comporta quando se encadeiam classes de multiconjuntos com elas próprias. Um estudo preliminar pode ser encontrado em <https://musica.ufma.br>.

Outra fonte potencial de estudos é compreender melhor o que acontece quando uma classe de conjuntos se encadeia com uma classe de multiconjuntos e, a depender das operações, os encadeamentos recaem na mesma forma prima pai, mas com duas ou mais formas primas filhas distintas. Verifica-se em princípio que para os hexacordes há quatro casos: as formas primas filhas têm a mesma quantidade de classes de intervalos em comum, as filhas têm quantidades diferentes, e quando há três, as três podem ter a mesma quantidade ou duas podem ter a mesma

quantidade e a outra não. Pergunta-se qual a relação entre a variação dos compostos de multiplicidades e a quantidade de classes de intervalos comuns?

Mais ainda, operações simples sempre se encadeiam com formas primas pai de cardinalidade menos um, enquanto as duplas podem encadear-se com menos um e menos dois, o que equivale a dizer que as operações simples sempre duplicam apenas um elemento, enquanto as duplas podem duplicar um elemento, dois elementos e mesmo triplicar um mesmo elemento, reduzindo a cardinalidade da forma prima pai para menos dois.

Ainda no que diz respeito às classes de intervalos em comum entre encadeamentos, pode ser importante verificar quais encadeamentos resultam em mais e em menos classes de intervalos em comum. Há relações diretas entre a quantidade total de classes de intervalos em comum e os compostos de distribuição de intervalos?

Os encadeamentos entre classes de conjuntos que têm classes de somas iguais, uma das principais razões de acrescentar operações duplas ao espaço de encadeamentos, se conectam mesmo estando afastados no espaço e com os elementos que os compõem aparentemente muito dessemelhantes (ver nota de rodapé 51). Por exemplo, mesmo através de uma operação simples, a classe de conjuntos 5-31 (01369) conecta-se com 5-26 (02458), ambas com classes de soma 19. Em outros casos, há encadeamentos em que a classe de somas tem uma diferença de mais ou menos 6, por exemplo: 6-1 (012345) conecta-se por operação dupla com 6-8 (023457), uma diferença de +6. Há alguma relação direta entre classes de somas e encadeamentos? Há leis gerais para acomodar todas estas indagações? E poder-se-ia seguir daqui para uma infinidade de porquês que se afiguram e ficam por ora sem resposta.

Ao par de quanto se escreveu até aqui, duas sensações entrelaçam-se na construção do espaço atonal expandido de encadeamentos e são mais do que meros vislumbres. A primeira remonta a um velho e primeiro artigo (Bordini, 1992) no qual se aduzia o maravilhamento diante daquilo que ultrapassa os limites da percepção humana, como olhar o céu noturno estrelado, da concepção de sublime conforme Kant e Lyotard. A segunda é a perplexidade de quem encontra as “eternas tranças douradas” de Hofstadter e as contempla admirado. E assim, de tanto encontrá-las sem poder entendê-las de todo e nem descrever a interminável e saltitante música intangível dos números, desiste-se e um ciclo se completa enquanto se coloca nesta tese, como soe acontecer, um efêmero ponto final.

REFERÊNCIAS

- Albuquerque, Joel Miranda Bravo de; Salles, Paulo de Tarso. Rede de projeções por inversão, relações entre *tonnetze* de diferentes tricordes, *Musica Theorica*, v. 1, no. 2, 2016.
- Almada, Carlos de Lemos. A Theory for Parsimonious Voice-Leading Classes. *Musica Theorica*, v.n5, no. 2, 2020.
- _____. Representação geométrica de conduções parcimoniosas de vozes em progressões harmônicas em música popular. *Anais do XXVII Congresso da ANPPOM*, v. 27, p. 1-8, 2017.
- _____. Variation and Developing Variation under a Transformational Perspective, *Musica Theorica*, v. 4, no. 1, 2019.
- Bordini, Ricardo Mazzini; Sampaio, Marcos da Silva. Schoenberg, Suite Op. 25, *Präludium*: um estudo de propriedades intervalares, encadeamentos por semitom e distribuição estatística. *Musica Theorica*, v. 9, no. 2, p. 1-26, 2024.
- Bordini, Ricardo Mazzini. Expanded Atonal Voice-Leading Space for Trichords: an auxiliary model for generating pre-compositional material. *Musica Theorica*, v. 3, no. 1, p. 108-127, 2018.
- _____. Composição: análise e síntese, sistemas, princípios e técnicas. *Arteriais*, v. 1, n. 2: 107-115, 2015.
- _____. Teoria Pós-tonal, Composição musical, analogia relambória? *Anais do XVI Congresso da ANPPOM*, v. 16: 832-842, 2006.
- _____. *A Teoria Pós-tonal e o Processador de Classes de Notas Aplicados à Composição Musical - Um Tutorial*. 2003. 375 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Música - Composição, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2003.
- _____. Investigação de Canção de garoa de Bruno Kiefer. *Em pauta*, v. 12/13, p. 131-136, 1997.
- _____. *Do Que Pudera Lembrar-se o Barqueiro Cujo Barco Era a Lua*. 1994. 127 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Música - Composição, Universidade Federal da Bahia, 1994a.
- _____. Uma Análise, pela Teoria Pós-tonal, de Piano Piece (1984). In Perrone, Conceição et alii. *A Música de Jamary Oliveira: Estudos Analíticos*. Porto Alegre: CPG-Música/UFRGS, 1994b. P. 77-107.
- _____. Complemento para Uma Análise, pela Teoria Pós-tonal, de Piano Piece (1984). In Perrone, Conceição et alii. *A Música de Jamary Oliveira: Estudos Analíticos*. Porto Alegre: CPG-Música/UFRGS, 1994c. P. 109-116.
- _____. O PCN: um breve comentário In Perrone, Conceição et alii. *A Música de Jamary Oliveira: Estudos Analíticos*. Porto Alegre: CPG-Música/UFRGS, 1994d. P. 142-147.

_____. Composição em Computadores: Concernências Teóricas. *ART* (Revista da Escola de Música e Artes Cênicas da Universidade Federal da Bahia), v. 20, p. 33 - 39, 1992.

Braga, Vinicius *et alii*. Implementação de um sistema composicional semiaberto a partir da similaridade entre conjuntos de classes de notas. *Opus*, v. 26, no. 2, 2020.

Coelho de Souza, Rodolfo. Harmonic Perception and Voice Leading Spaces of Set Classes Related by Unordered Interval Classes, *Musica Theorica*, v. 3, no. 2, 2019.

Callender, Clifton; Quinn, Ian; Tymoczko, Dmitri. Generalized Voice-leading Spaces. *Science*, v. 320, n. 5874, p.346-348, Apr. 2008.

Cohn, Richard. A Tetrahedral Graph of Tetrachordal Voice-Leading Space. *Music Theory Online*, v. 9, n. 4, p.1-19, Oct. 2003.

_____. An Introduction to Neo-Riemannian Theory: A Survey and Historical Perspective. *Journal Of Music Theory*, v. 42, n. 2, p.167-180, 1998.

_____. Neo-Riemannian Operations, Parsimonious Trichords, and Their "Tonnetz" Representations. *Journal Of Music Theory*, v. 41, n. 1, p.1-66, 1997.

Cook, Robert C. Parsimony and Extravagance. *Journal Of Music Theory*, [s.l.], v. 49, n. 1, p.109-140, 2005.

Espinheira, Alexandre Mascarenhas. Geração de material pré-compositivo a partir de ritmos tradicionais: o time-point reverso e a série Orixás. *Anais do XXIX Congresso da ANPPOM*, v. 29: 1-8, 2019.

_____. *A Teoria pós-tonal aplicada à composição: um guia de sugestões compositivas*. 2011. Tese (Doutorado), Universidade Federal da Bahia, 2011.

_____. Projeção compositiva: revisão bibliográfica e propostas para ampliação da utilização do conceito. *Anais do XX Congresso da ANPPOM*, v. 20, p. 54-60, 2010.

_____. *Tupatacuntum*: suíte sinfônica de gêneros baianos com a utilização da Teoria pós-tonal para geração de material compositivo. 2008. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal da Bahia. 2008.

_____. 0258 (Lapa-Barroquinha). *Ictus*, v. 7: 181–188, 2008.

Garcia, Rodrigo. *Reconstruindo a passeata dos "50 mil": aplicação das funções da música de cinema e da teoria pós-tonal para a criação da trilha musical do documentário 1968 de Glauber Rocha*. 2011. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal da Bahia, 2008.

Kook, Julian. *Exploring Musical Spaces: A Synthesis of Mathematical Approaches*. New York: Oxford University Press, 2023. (Série: Oxford Studies in Music Theory.)

Kröger Junior, Pedro Ribeiro. Burocracia: uma visão geral. In Perrone, Conceição *et alii*. *A Música de Jamary Oliveira: Estudos Analíticos*. Porto Alegre: CPG-Música/UFRGS, p. 5-23, 1994.

Lerdahl, Fred. Tonal Pitch Space. *Music Perception*, v. 5, no. 3, p. 315-349, 1988.

Lewin, David. Cohn Functions. *Journal Of Music Theory*, v. 40, n. 2, p.181-216, 1996.

_____. *Generalized Musical Intervals and Transformations*. New Haven, CT: Yale University Press, 1987.

Lundberg, Justin. *A Theory of Voice-leading Sets for Post-tonal Music*. 2012. 226 f. Tese (Doutorado) - Curso de Música, Eastmann School Of Music - University Of Rochester, New York, 2012.

Morris, Robert. Voice-Leading Spaces. *Music Theory Spectrum*, v. 20, n. 2, p.175-208, 1998.

_____. Compositional Spaces and Other Territories. *Perspectives of New Music*, v. 33, n. 1-2, p. 328-58, 1995.

Nogueira, Ilza Maria Costa; Pascoal, Maria Lúcia. A teoria dos conjuntos no Brasil: uma visão historiográfica. In Nogueira, Ilza (org.) e Navia, Gabriel (ed.). *Teorias estrangeiras no Brasil: migração, enculturação e aculturação*. Salvador: TeMA, 2024. P. 131-193.

_____. (org.). *Teoria e Análise Musical em Perspectiva Didática*. Salvador: UFBA, 2017.

_____. *Ernst Widmer: Perfil Estilístico*. Salvador: UFBA, 1997.

_____. *Ambiguidade e contextualidade: princípios fundamentais da linguagem pós-tonal de Ernst Widmer*. Cadernos de estudo: análise musical, n. 5, São Paulo: Atravez: 1-20, 1992.

_____. Schoenberg Op. 19/6: Uma Abordagem Através da Teoria dos Conjuntos, *ART* (Revista da Escola de Música da Universidade Federal da Bahia), v. 16, p. 55-73, 1988.

Oliveira, Jamary; Sampaio, Marcos da Silva; Bordini, Ricardo Mazzini. A harpa de concerto: estudo de glissandi e de configurações dos pedais com categorização de classes de conjuntos. *Ictus*, v. 15, p. 25-48, 2021.

Oliveira, Jamary. *Informática em Música: O Parâmetro Altura*. Série REÍSA, no. 1, Salvador: Mestrado em Música/UFBA, 1995.

_____. SÉRIE: Um Programa Auxiliar para Análise de Música Dodecafônica". *ART* (Revista da Escola de Música da Universidade Federal da Bahia), v. 2, p. 113-132, 1981.

Pires, Carlos Augusto Vasconcelos. *Prolongando Contornos: Aplicação Composicional de Operações com Contorno*. 2010. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Música - Composição, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2010.

_____. *Algoritmo composicional baseado na teoria dos contornos: propostas e aplicações*. 2012. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Música - Composição, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2012.

Pitombeira, Liduino. Compositional systems: overview and applications. *MusMat*, v. 4, n. 1, p. 39-62, 2020.

Robinson, Thomas. *Pitch-class multisets*. 2009. 251 f. Tese (Doutorado) – Departamento de Música – The City University Of New York, New York, 2009.

Roeder, John. A Geometric Representation of Pitch-Class Series. *Perspectives Of New Music*, [s.l.], v. 25, n. 1/2, p.362-409, 1987.

_____. *A Theory of Voice Leading for Atonal Music*. 1984. 416 f. Tese (Doutorado) - Curso de Música, Yale University, New Haven, CT, 1984.

Salles, Paulo de Tarso. Regiões Euler: um Estudo sobre Distância Tonal e Integração entre os Ciclos Octatônicos e Hexatônicos, *Musica Theorica*, v.1, no. 1, 2016.

_____. Voice Leading Among Pitch-Class Sets: Revisiting Allen Forte's Genera, *Journal MusMat*, v. 4, no. 2, p. 66-79, 2020.

Sampaio, Marcos da Silva. Contour Similarity Algorithms, *Journal MusMat*, v. 2, n. 2, p. 58-78, 2018.

_____; Kröger Jr., Pedro Ribeiro. Contour Algorithms Review, *Journal MusMat*, v. 1, no. 1, p. 72-85, 2016.

_____. *A Teoria de Relações de Contornos Musicais: inconsistências, soluções e ferramentas*. 2012. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Música - Composição, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2012.

_____. *Em torno da romã: aplicações de operações com contorno na composição*. 2008. Tese (Doutorado) - Curso de Pós-graduação em Música - Composição, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2008.

Santana, Hermilo Pinheiro. *Aplicação da teoria Pós-Tonal no poema sinfônico Na noite*. 2010. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Música - Composição, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2010.

Singh, D. *et alii*. An overview of the applications of multisets. *Novi Sad Journal of Mathematics*, v. 37, n.2, 73-92, 2007.

Straus, Joseph Nathan. *Introduction to Post-Tonal Theory*. 4. ed. New York: W. W. Norton, 2016.

_____. Total Voice Leading. *Music Theory Online*, v. 20, n. 2, [n.p], 2014.

_____. *Introdução à Teoria Pós-tonal*. Salvador: Edufba e Unesp, 2010. Tradução de: Ricardo M. Bordini.

_____. *Introduction to Post-Tonal Theory*. 3. ed. New York: Pearson Prentice Hall, 2005a.

_____. Voice Leading in Set-Class Space. *Journal Of Music Theory*, v. 49, n. 1, [n.p], 45-108, 2005b.

_____. Uniformity, Balance, and Smoothness in Atonal Voice Leading. *Music Theory Spectrum*, v. 25, n. 2, p.305-352, 2003.

_____. *Introduction to Post-Tonal Theory*. 2. ed. New York: Pearson Prentice Hall, 2000.

_____. Voice Leading in Atonal Music. In: Baker, James M.; Beach, David W.; Bernard, Jonathan W. (Ed.). *Music Theory in Concept and Practice*. p. 237-274. Rochester, New York: University Of Rochester Press, 1997.

_____. *Introduction to Post-Tonal Theory*. 1. ed. New York: Pearson Prentice Hall, 1990.

Tymoczko, Dmitri. *A Geometry of Music: Harmony and Counterpoint in the Extended Common Practice*. New York: Oxford University Press, 2011.

_____. Set-class similarity, voice leading, and the fourier transform. *Journal of Music Theory*, v. 52, n. 2, p. 251-272, 2008.

_____. Iterable Voice-Leading Schemas. *Journal MusMat*, v. 2, no. 1, p. 109-113, 2018.